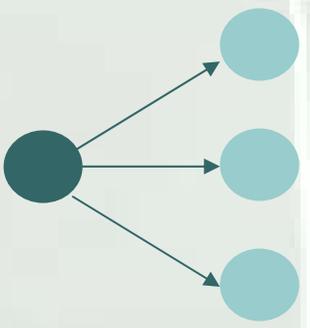


Venn Diagram

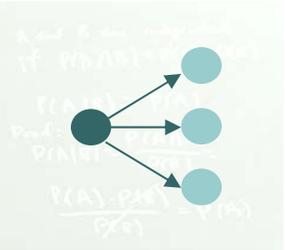


# Probabilidade

Distribuição Exponencial

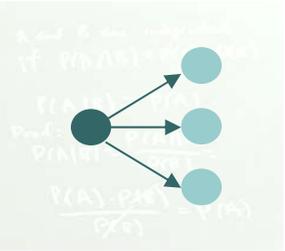


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$\frac{10}{36} = \frac{4}{36} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36}$$

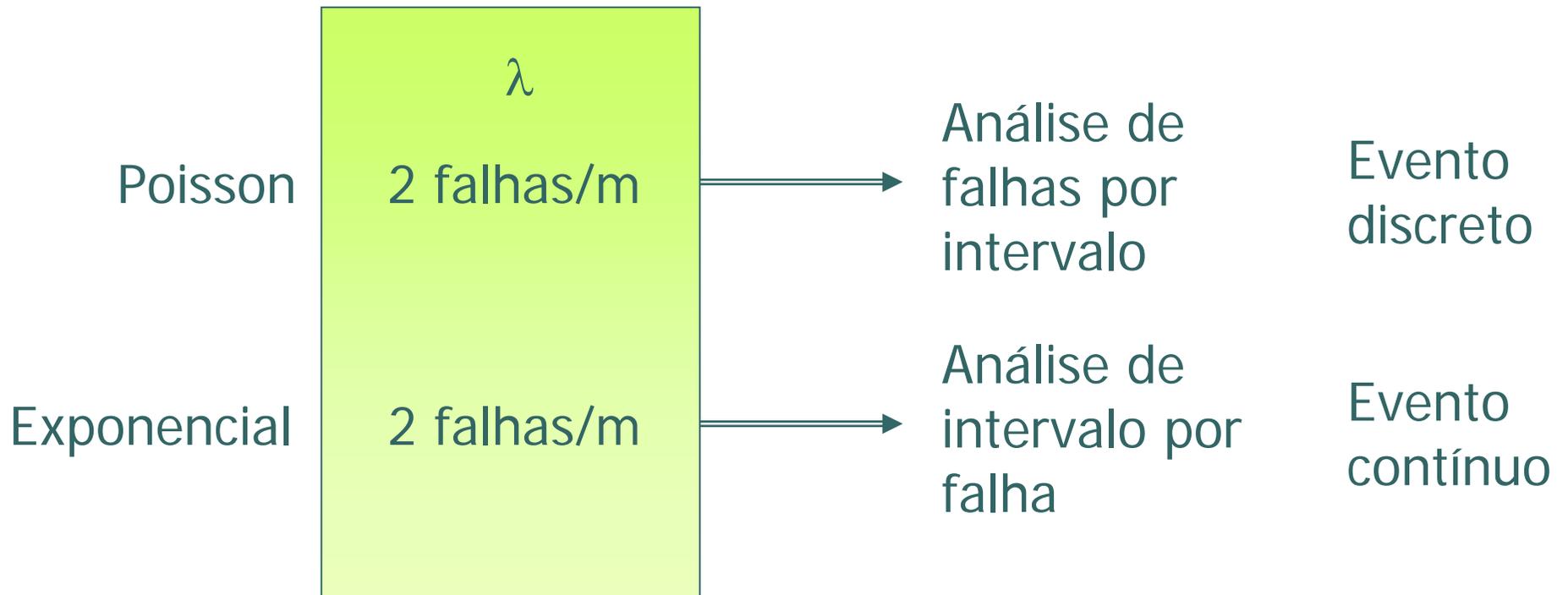


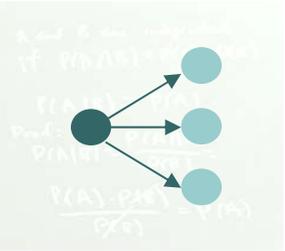
# Aplicação

- Aplicada nos casos onde queremos analisar o espaço ou intervalo de acontecimento de um evento;
  - Na distribuição de Poisson – estimativa da quantidade de eventos num intervalo – distribuição de dados discreta.
    - Ex.: um fio de cobre apresenta uma taxa de 2 falhas por metro. Qual a probabilidade de apresentar, em um metro, 4 falhas?
  - A distribuição exponencial está ligada à de Poisson; ela analisa inversamente o experimento: um intervalo ou espaço para ocorrência de um evento.
    - No exemplo do fio, qual a probabilidade de ocorrer uma falha em em 0,5 metros, se ele possui uma taxa de 2 falhas por metro?

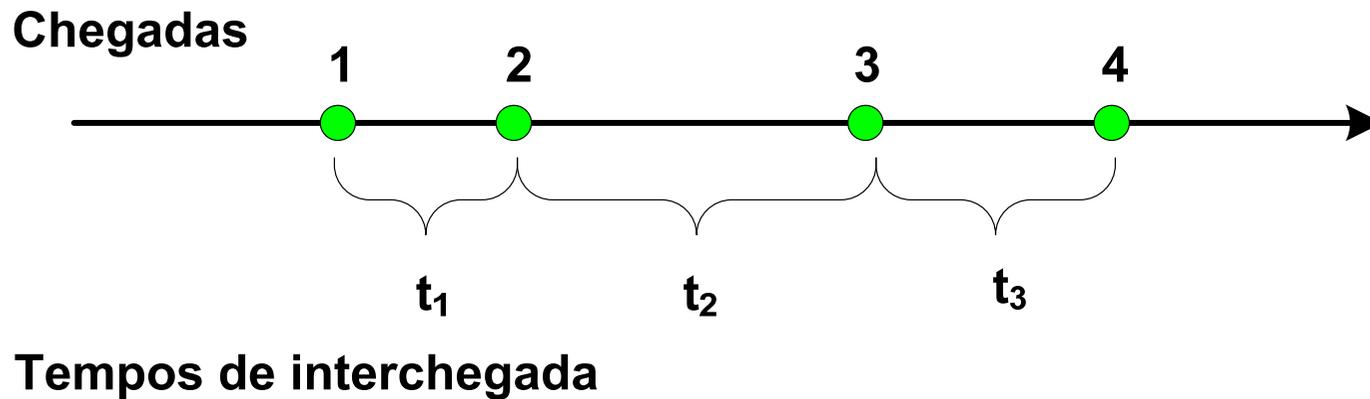


# Aplicação





# Relação entre Distribuições de Poisson e Exponencial



# A Curva Densidade de Probabilidade

- A distribuição exponencial depende somente da suposição de que o evento ocorra seguindo o processo de Poisson.
- No exemplo: a probabilidade relacionada ao comprimento do fio depende apenas da suposição das falhas no fio seguirem o processo de Poisson.

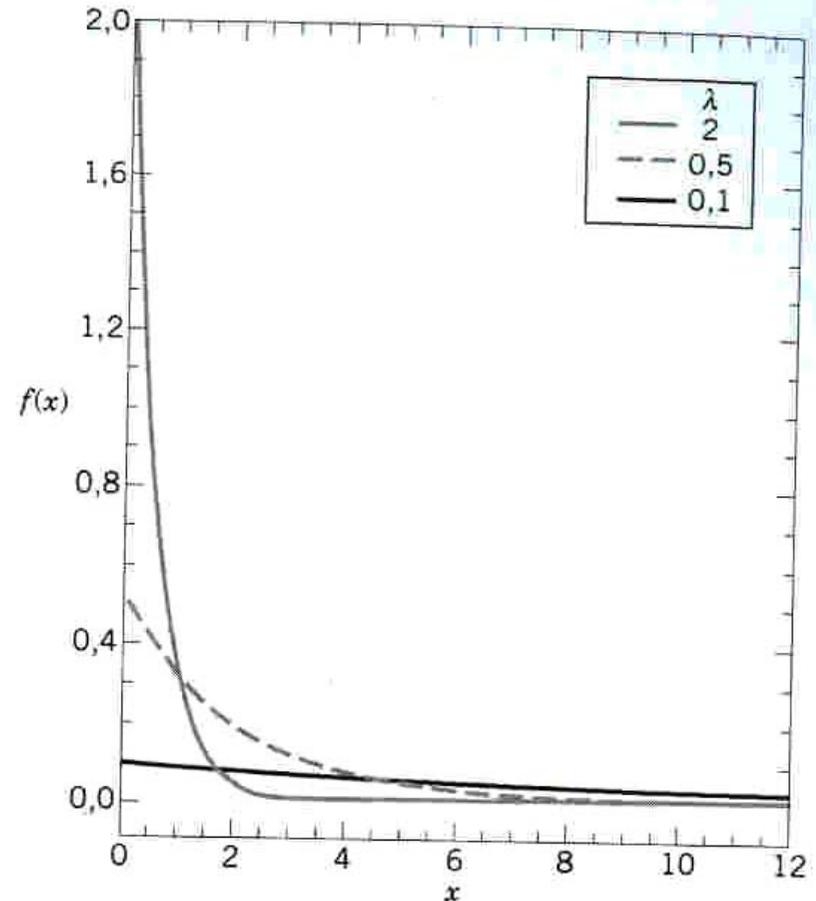
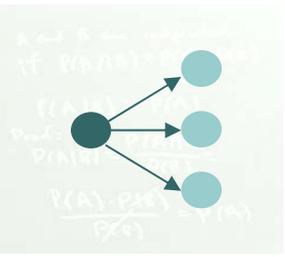
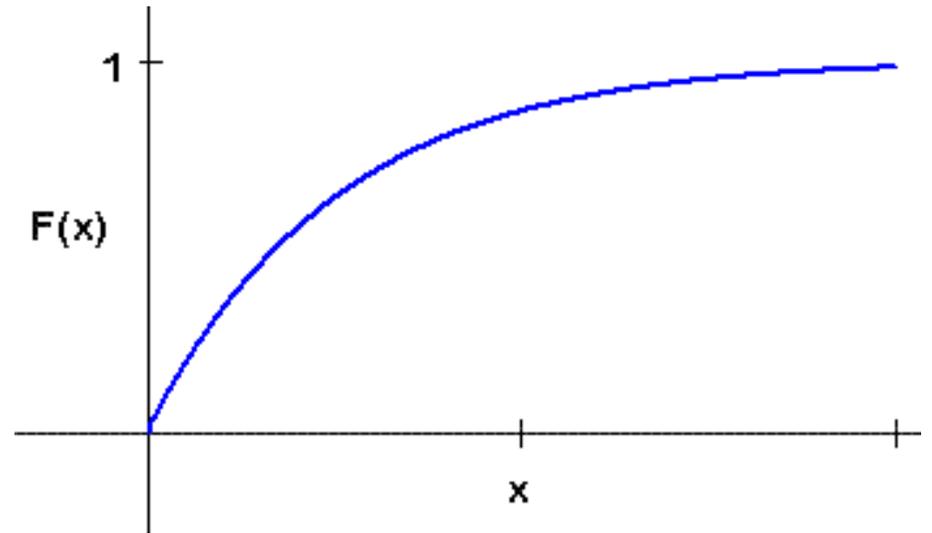
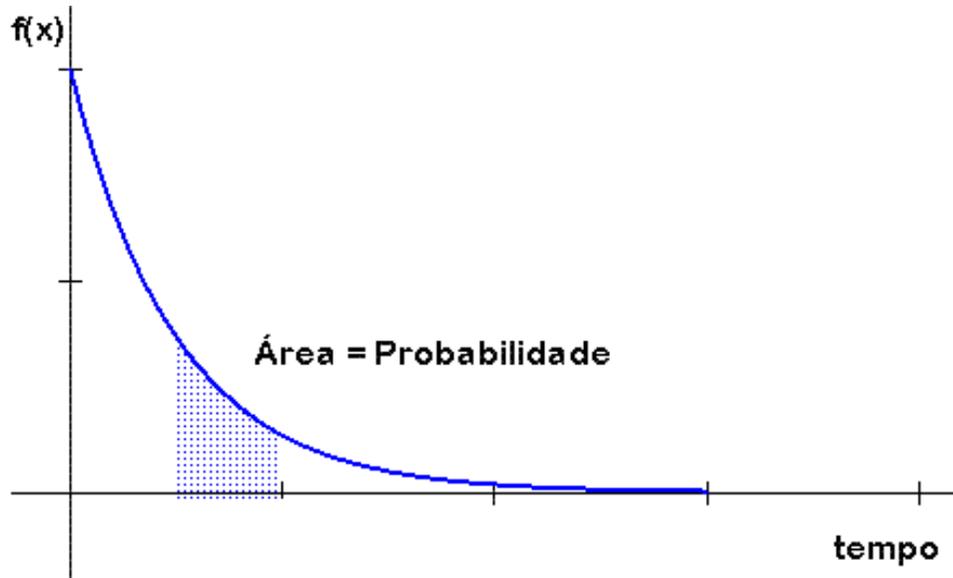
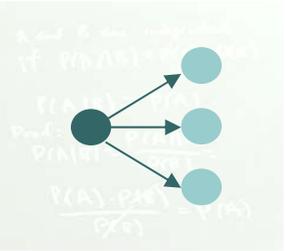


Fig. 5.24 Função densidade de probabilidade de uma variável aleatória exponencial para valores selecionados de  $\lambda$ .



# Curvas da Distribuição Exponencial





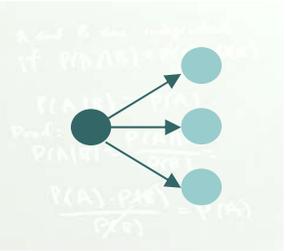
# Definição

- A variável  $X$ , que é igual à distância entre contagens sucessivas de um processo de Poisson, com média  $\lambda > 0$ , tem uma distribuição exponencial com parâmetro  $\lambda$ . A função densidade de probabilidade de  $X$  (pdf) é:

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Para  $0 \leq x < \infty$

O ponto inicial para medir  $X$  não importa, porque a probabilidade do número de falhas em um intervalo de um processo de Poisson depende somente do comprimento do intervalo e não da localização.



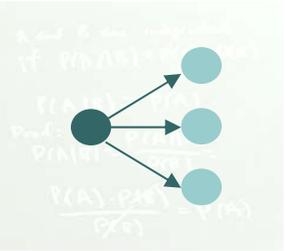
# Definição

- O parâmetro  $\lambda$  é a taxa de ocorrência por intervalo
  - Mesmo  $\lambda$  de Poisson
- Pode-se usar um parâmetro 'a', que é o “tamanho do intervalo entre ocorrências”
  - Ex.:  $\lambda$  = falhas por metro de fio  $\rightarrow$  a = metros de fio entre falhas
  - Ou:  $\lambda$  = ligações por minuto  $\rightarrow$  a = minutos entre ligações
- Assim, tipicamente,  $a=1/\lambda$

A pdf de X fica:

$$f(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{-x/a}$$

Para  $0 \leq x \leq \infty$



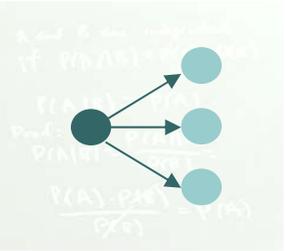
# Média e Desvio padrão

- Se a variável aleatória  $X$  tiver uma distribuição exponencial, com parâmetro  $\lambda$  (ocorrência por intervalo), então:

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

Ou seja, se  $\lambda = 2$  falhas/m, então o valor esperado de distância por falha é  $\frac{1}{2} = 0,5\text{m/falha}$

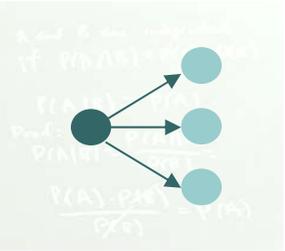


# Média e Desvio padrão

- Se a variável aleatória  $X$  tiver uma distribuição exponencial, com parâmetro  $a$  (intervalo entre ocorrências), então:

$$E(x) = a$$

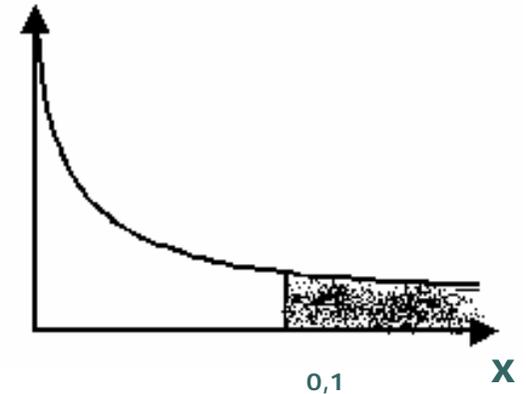
$$\sigma = a$$



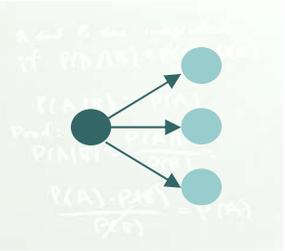
# Exemplo

- Em uma grande rede corporativa de computadores, as conexões dos usuários ao sistema podem ser modeladas como um processo de Poisson, com média de 25 conexões por hora. Qual a probabilidade de não haver conexões em um intervalo de 6 minutos?

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$



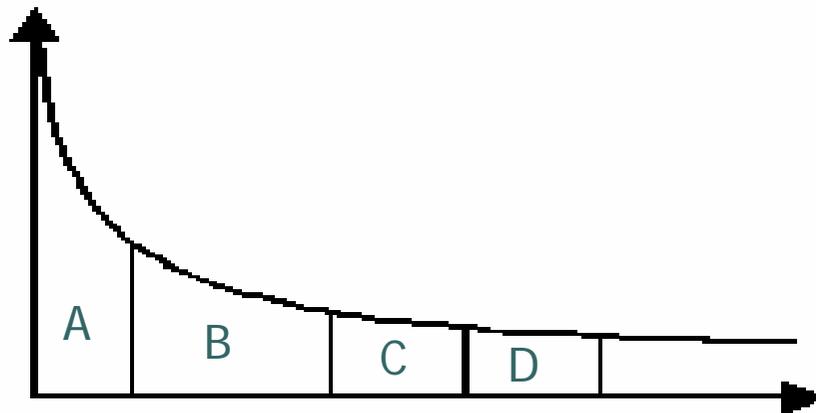
$$P(X > 0,1) = \int_{0,1}^{\infty} 25 \cdot e^{-25 \cdot x} \cdot dx = -e^{-25 \cdot \infty} - (-e^{-25 \cdot 0,1}) = e^{-25 \cdot 0,1} = 0,082$$

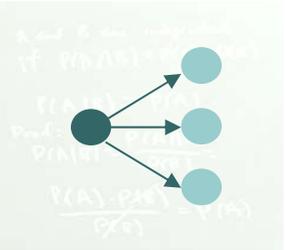


# Exemplo

- Qual a probabilidade de que o tempo até a próxima conexão esteja entre 2 e 3 minutos?

$$P(0,033 < X < 0,05) = \int_{0,033}^{0,05} 25 \cdot e^{-25 \cdot x} \cdot dx = -e^{-25 \cdot 0,05} - (-e^{-25 \cdot 0,033}) = 0,152$$





# Exemplo

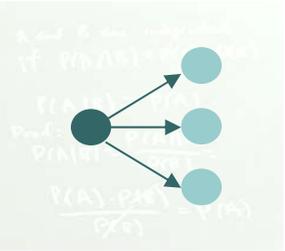
- Determine o intervalo de tempo tal que a probabilidade de nenhuma conexão ocorrer neste intervalo seja 0,90
- É o mesmo que dizer “um intervalo em que a probabilidade de ocorrer 1 conexão seja de 0,10”

$$P(X \leq x) = 0,10 \therefore P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 0,90$$

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} = 0,10 \therefore$$

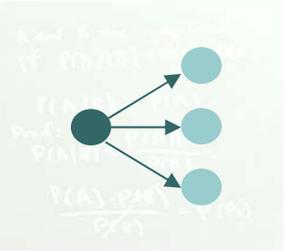
$$e^{-25 \cdot x} = 0,90$$

$$x = 0,00421 \text{ hora} \Rightarrow x = 0,25 \text{ min}$$



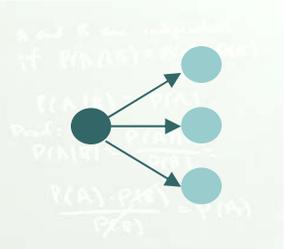
## $E(x)$ e $\sigma$

- Valor esperado até a próxima conexão:
  - $E(x) = 1/25 = 0,04$  horas = 25 min
- O desvio padrão do tempo até a próxima conexão
  - $\sigma = 1/25 = 0,04$  hora = 25 min

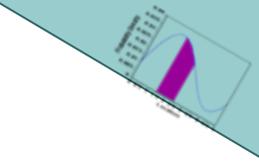


# Comentários

- A probabilidade de não haver conexão no intervalo de 6 minutos é 0,082 independente do tempo inicial do intervalo, pois o processo de Poisson supõe que os eventos ocorrem uniformemente através do intervalo de observação, não ocorrendo agrupamentos de eventos.
- Assim, a probabilidade de ocorrência da primeira ligação após 12:00 ser depois de 12:06 é a mesma probabilidade de conexão depois das 15:00 ocorrer após 15:06.



# Comentários



- Propriedade de Falta de Memória

- Seja  $X$  o tempo entre detecções de uma partícula rara em um contador *geiger* e considere que  $X$  tenha uma distribuição exponencial com  $a=1,4$  minutos. A probabilidade de detectarmos uma partícula dentro de 30 segundos a partir do começo da contagem é:
- Obs:  $a=1,4$  minutos  $\rightarrow \lambda=1/1,4$  partículas/minuto para o processo de Poisson

$$P(X < 0,5 \text{ min}) = 1 - e^{-0,5/1,4} = 0,30$$

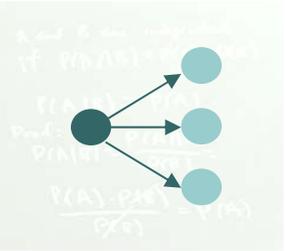
- Agora, supondo que ligamos o contador *geiger* e esperamos 3 minutos sem detectar partícula. Qual a probabilidade de uma partícula ser detectada nos próximo 30 segundos?

$$P(X < 3,5 / X > 3 \text{ min}) = P(3 < X < 3,5) / P(X > 3)$$

$$P(3 < X < 3,5) = F(3,5) - F(3) = [1 - e^{-3,5/1,4}] - [1 - e^{-3/1,4}] = 0,0035$$

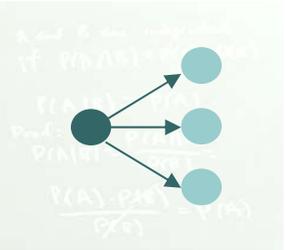
$$P(X > 3) = e^{-3/1,4} = 0,117$$

$$P(3 < X < 3,5) / P(X > 3) = 0,0035 / 0,117 = 0,3$$



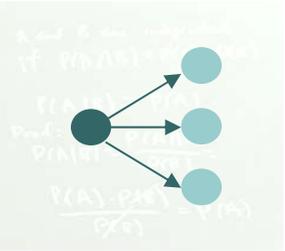
# Comentários

- Depois de esperar por 3 minutos sem uma detecção, a probabilidade de uma detecção nos próximos 30 segundos é a mesma probabilidade de uma detecção nos 30 segundos imediatamente após começar a contagem.



# Uso

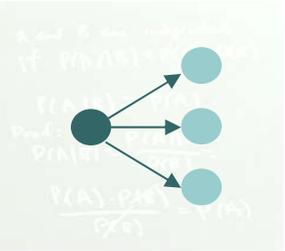
- A distribuição exponencial é freqüentemente usada em estudos de confiabilidade como sendo o modelo para o tempo até a falha de um equipamento – muito utilizado para componentes eletrônicos



# Uso

- Exemplo:

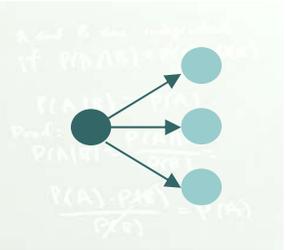
- O tempo de vida até a falha de um semicondutor pode ser modelado por uma variável aleatória exponencial com média de 40.000h.



# Uso

## ○ Exemplo:

- A propriedade de falta de memória da distribuição exponencial implica que o equipamento não se desgasta, ou seja: independente de quanto tempo o equipamento tenha operado, a probabilidade de uma falha nas próximas 1.000h é a mesma que a probabilidade de uma falha nas primeiras 1.000 horas de vida do equipamento



# Uso

- Exemplo:

- Portanto, equipamentos que sofrem desgaste com o tempo (a taxa de falha varia com o tempo de uso), como peças mecânicas (mancais, rolamentos,...) são melhor modelados por uma distribuição tal que  $P(L < t + \Delta t / L > t)$  (sendo  $L$  o tempo de vida do equipamento) aumente com o tempo – distribuições de Weibull