



Probabilidade

Distribuição Normal

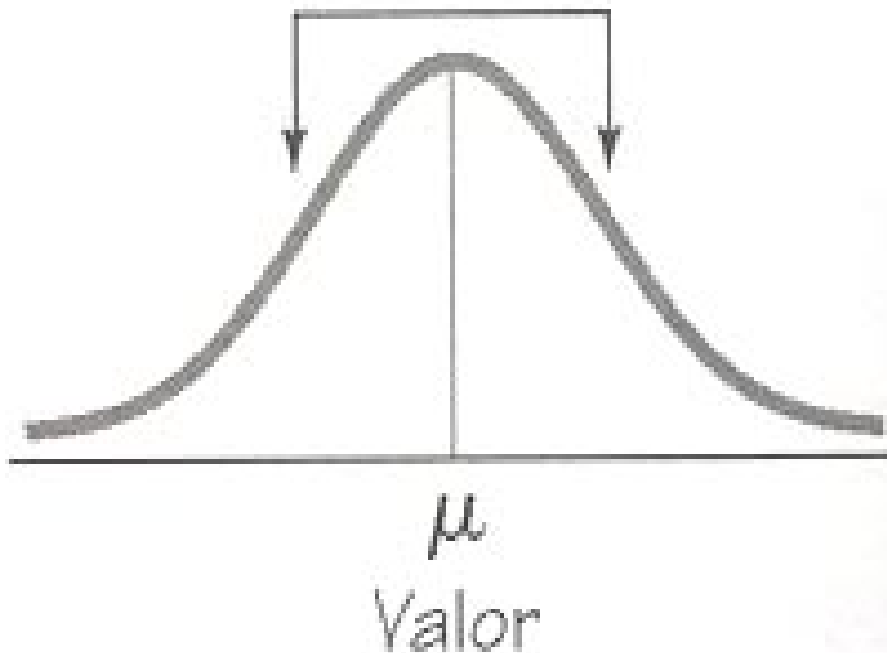


Distribuição Normal

- Uma variável aleatória contínua tem uma distribuição normal se sua distribuição é:
 - simétrica
 - apresenta (num gráfico) forma de um sino

Função Densidade da Distribuição Normal

A curva tem a forma de um
sino e é simétrica



$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$



Distribuição Normal

- Quando uma distribuição é contínua, o gráfico de distribuição é uma linha contínua
- Não se visualiza as barras de um histograma, mas freqüências de ocorrências de cada valor de x em intervalos infinitesimais
- Forma uma Curva de Densidade de Probabilidade (função *pdf* – *Probability Density Function*)

Função Densidade da Distribuição Normal

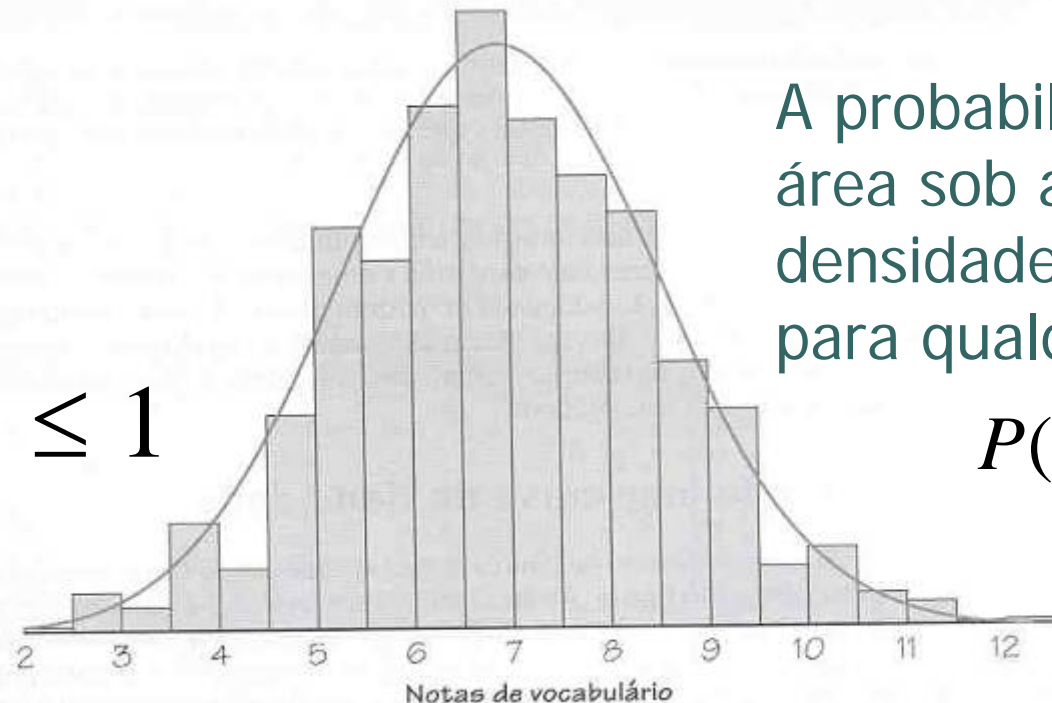
A função densidade da normal (e de qualquer outra variável aleatória contínua) pode ser compreendida como uma extensão natural de um histograma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1$$

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

A probabilidade é a área sob a curva de densidade. Portanto, para qualquer $P(x)$:

$$P(x) \geq 0$$

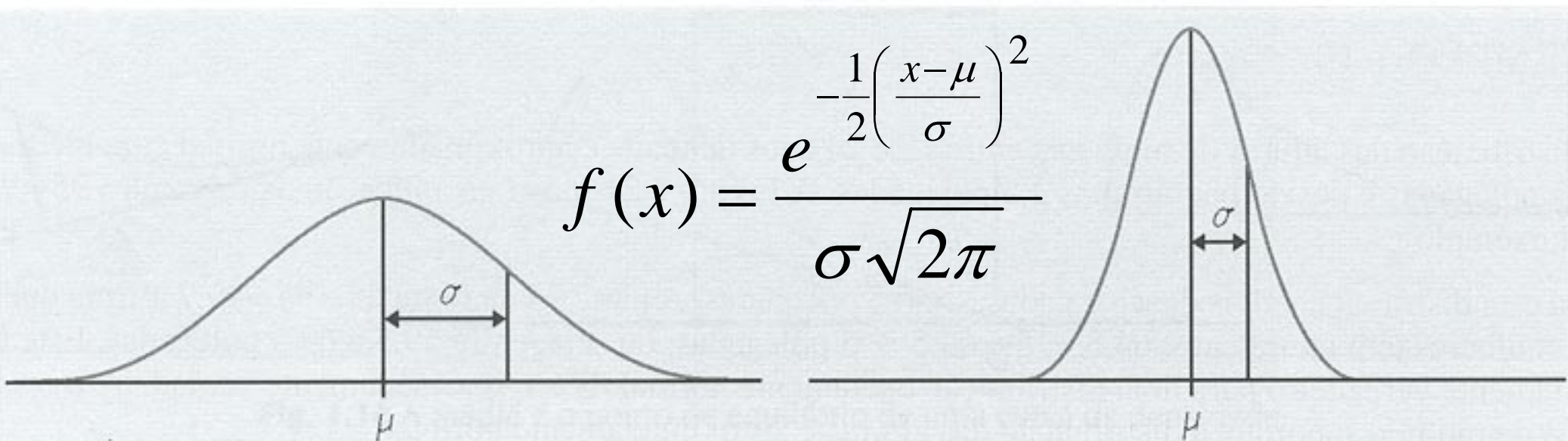


Distribuição Normal

Note que a distribuição normal é especificada por dois parâmetros:

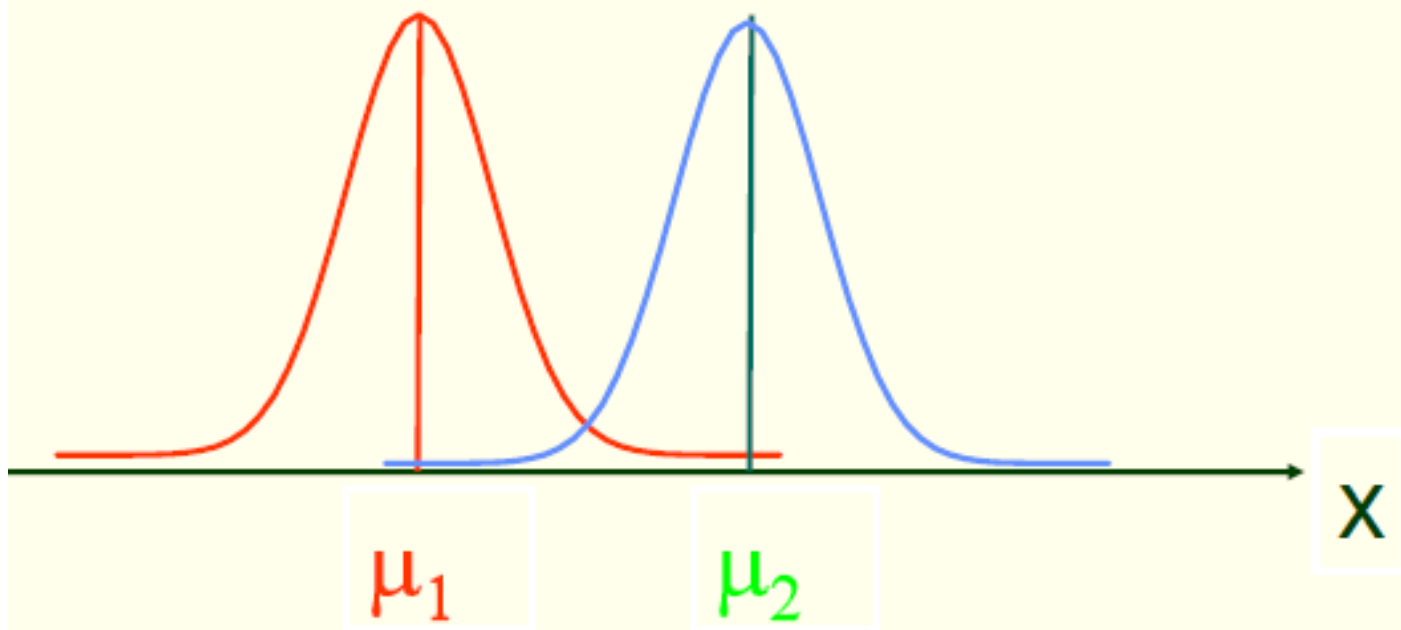
μ representa a média populacional, e

σ representa o desvio-padrão populacional



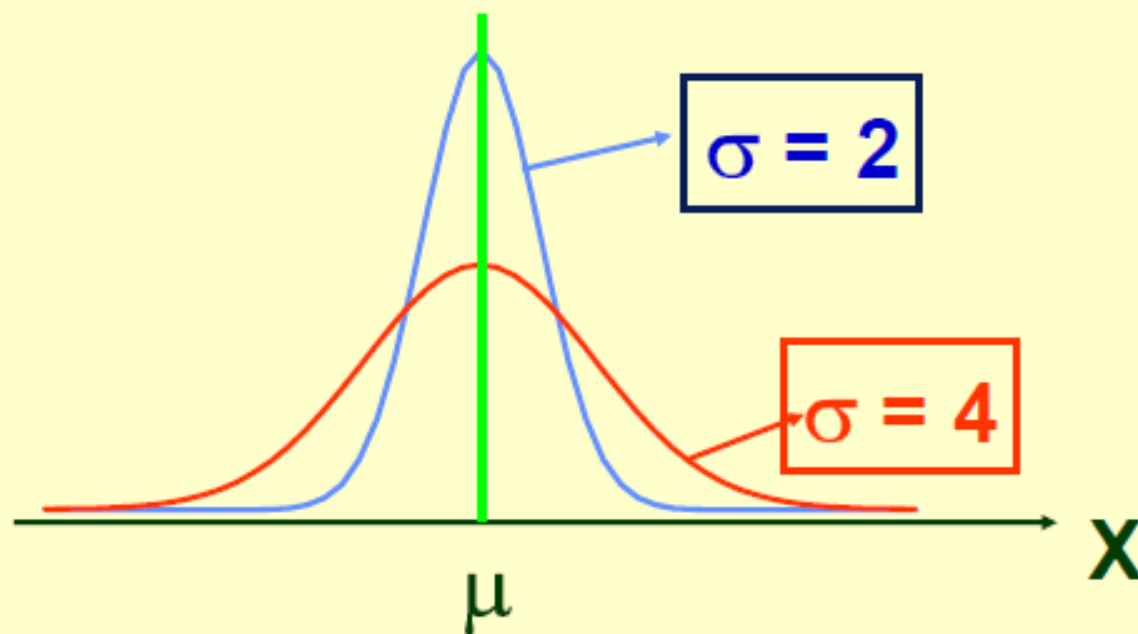
Média e Desvio Padrão

mesmo σ e diferentes μ



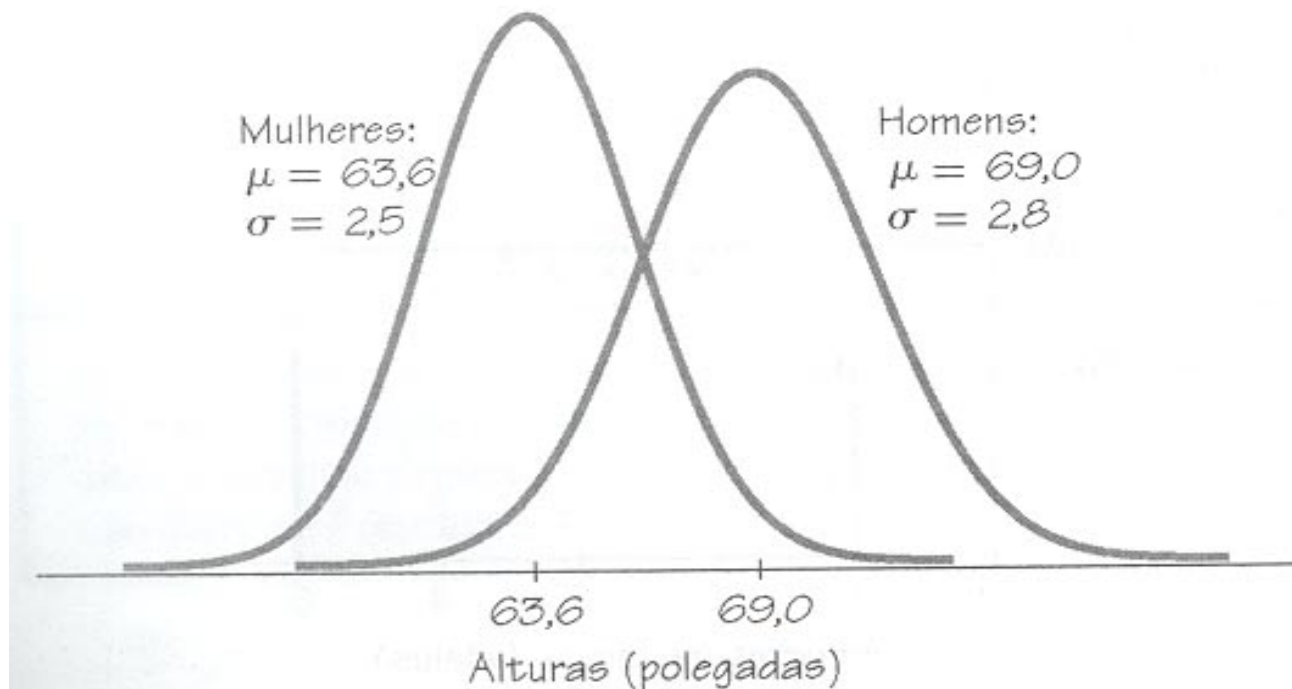
Média e Desvio Padrão

mesmo μ e diferentes σ



Distribuição Normal Padronizada

- Cada par de parâmetros (μ , σ) define uma distribuição normal distinta!
- A figura mostra as curvas de densidade para alturas de mulheres e homens adultos nos EUA





Distribuição Normal Padronizada

- A distribuição normal padronizada tem média e desvio padrão iguais a:

$$\mu = 0$$

$$\sigma = 1$$

- A distribuição normal padronizada facilita os cálculos de probabilidade, evitando o uso da fórmula e projetando qualquer análise mediante utilização de ESCORES (Z)

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Distribuição Normal Padronizada

- Se x é uma observação de uma distribuição que tem média μ e desvio-padrão σ , o valor padronizado de x é

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Note que o valor padronizado representa o número de desvios-padrão pelo qual um valor x dista da média (*para mais ou para menos*)



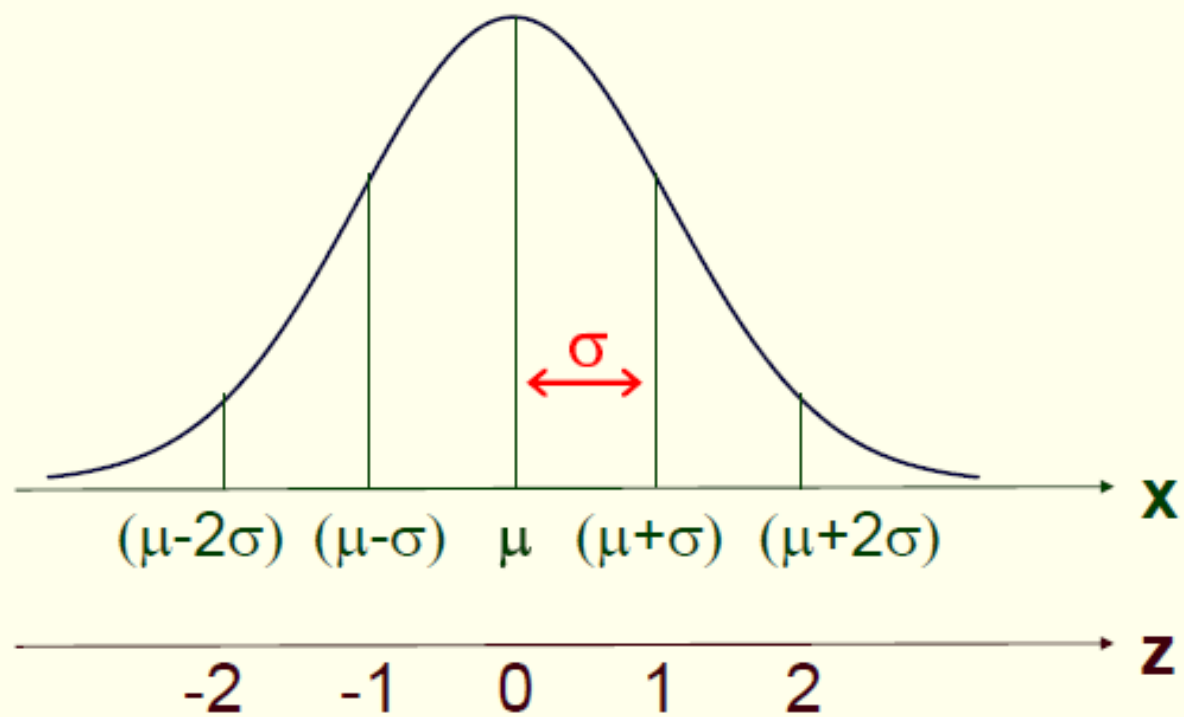
Distribuição Normal Padronizada

- Ou seja, como a distribuição normal padronizada é aquela que tem média 0 e desvio-padrão 1, ou seja $N(0, 1)$
- Se uma variável aleatória x tem distribuição normal qualquer $N(\mu, \sigma)$, então a variável padronizada

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

tem distribuição normal

Normal Padronizada





Exemplo

- Um professor de cálculo aplica dois testes diferentes a duas turmas do seu curso. Os resultados foram:

Turma 1: média = 75 desvio = 14

Turma 2: média = 40 desvio = 8

- Que nota é relativamente melhor: 82 na turma 1, ou 46 na turma 2?



Distribuição Normal Padronizada

- A estimativa de probabilidades associadas a variáveis aleatórias contínuas envolve o cálculo de áreas sob a curva da densidade.
- O uso da distribuição normal padronizada nos permite calcular áreas sob a curva de uma distribuição normal qualquer, pois as áreas associadas com a normal padronizadas são tabeladas.
- A Tabela A-2 será usada para os cálculos de probabilidade envolvendo distribuições normais.

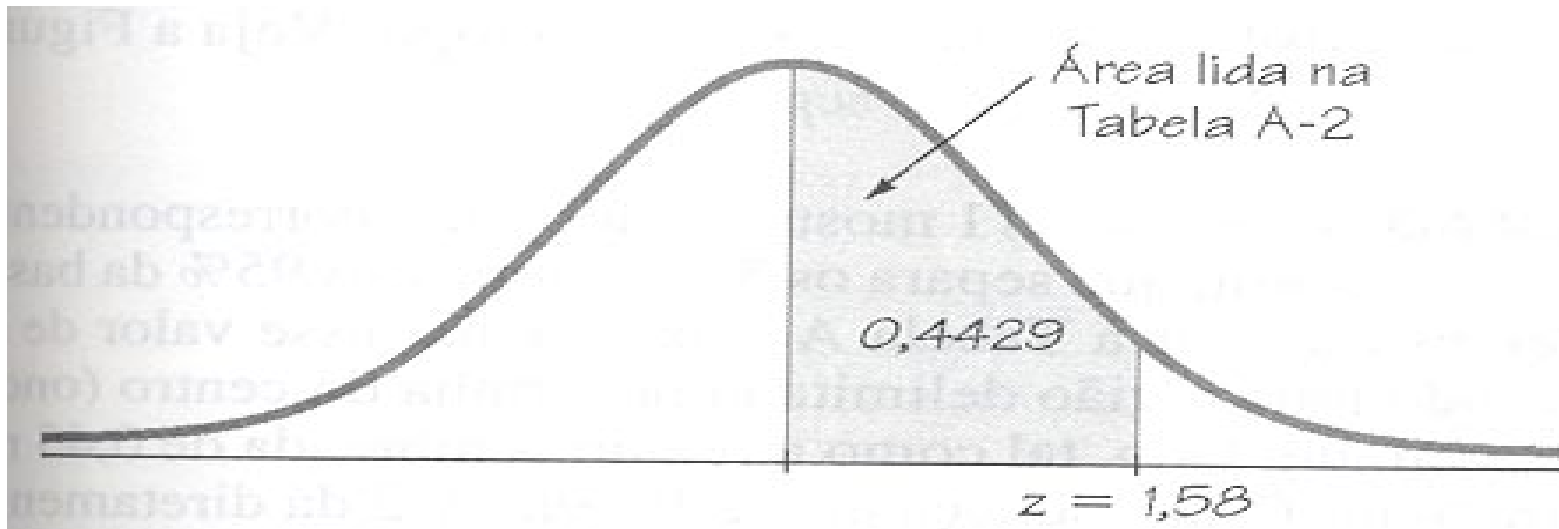


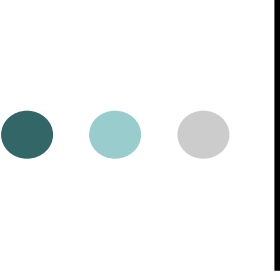
Exemplo

- Uma empresa fabrica termômetros que devem acusar a leitura de $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ no ponto de congelamento da água. Testes feitos em uma grande amostra desses termômetros revelaram que alguns acusavam valores inferiores a $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e alguns acusavam valores superiores.
- Supondo que a leitura média seja $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ e que o desvio-padrão das leituras seja $1,00\text{ }^{\circ}\text{C}$, qual a probabilidade de que, no ponto de congelamento, um termômetro escolhido aleatoriamente marque entre 0 e $1,58\text{ }^{\circ}\text{C}$?
- Admita que a frequência de erros se assemelhe a uma distribuição normal.

Exemplo



- A distribuição de probabilidade das leituras é uma normal padronizada porque as leituras têm $\mu = 0$ e $\sigma = 1$.
- A área da região sombreada, delimitada pela média 0 e pelo número positivo z , pode ser lida na Tabela A-2

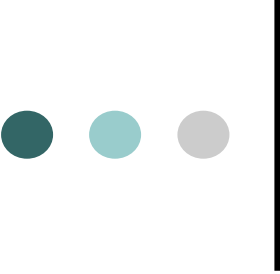




Distribuição Normal Padronizada

EXEMPLO

-  Portanto, a probabilidade de se escolher aleatoriamente um termômetro com erro entre 0 e 1,58 °C é 44,29 %
-  Outra maneira de interpretar este resultado é concluir que 44,29% dos termômetros terão erros entre 0 e 1,58 °C



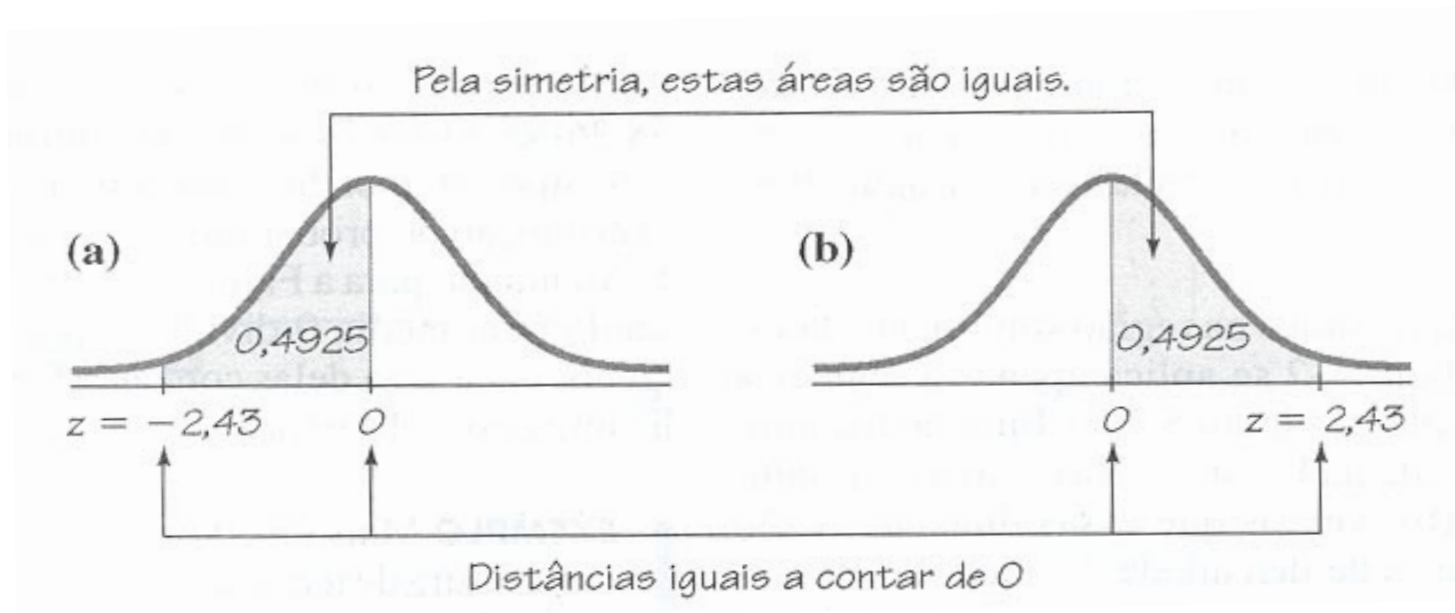
Distribuição Normal Padronizada


EXEMPLO

Com os termômetros do exemplo anterior, determine a probabilidade de se selecionar aleatoriamente um termômetro que acuse (*no ponto de congelamento da água*), uma leitura entre $-2,43\text{ }^{\circ}\text{C}$ e $0\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Distribuição Normal Padronizada


- Estamos interessados na região sombreada da Figura (a), mas a Tabela A-2 se aplica apenas a regiões à direita da média (0), como a da Figura (b)
- Podemos ver que ambas as áreas são idênticas porque a curva de densidade é simétrica !




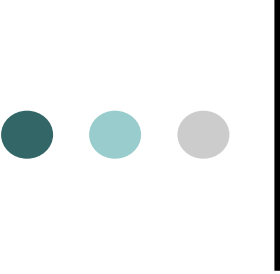


Distribuição Normal Padronizada

EXEMPLO

 Portanto, a probabilidade de se escolher aleatoriamente um termômetro com erro entre $-2,43^{\circ}\text{C}$ e 0°C é 49,25 %

 Em outras palavras, 49,25% dos termômetros terão erros entre $-2,43^{\circ}\text{C}$ e 0°C



Distribuição Normal Padronizada

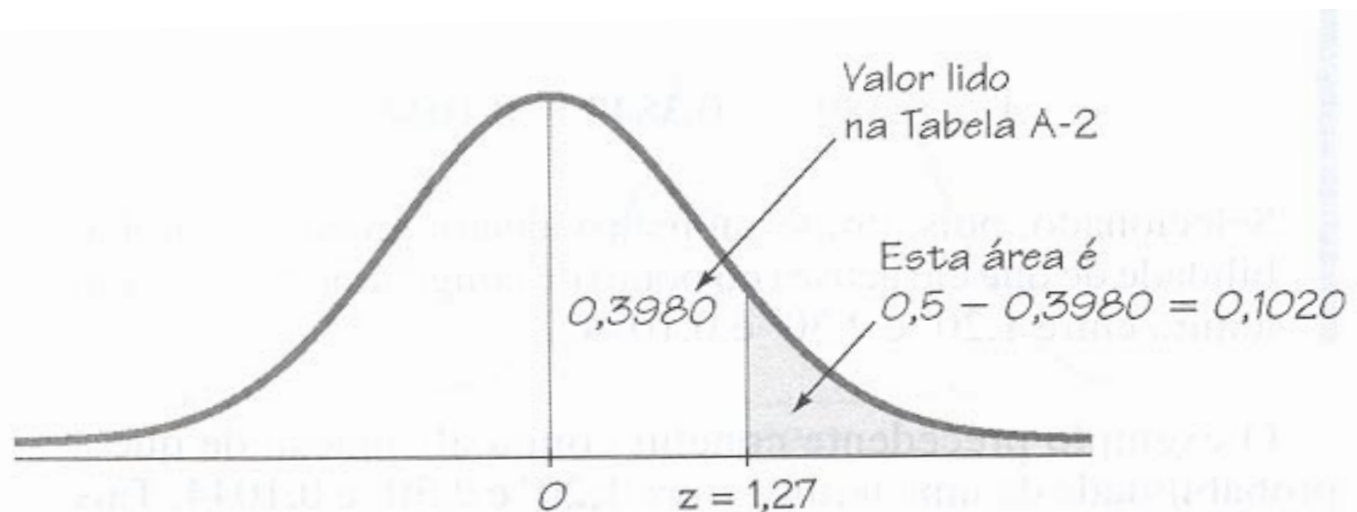
EXEMPLO


Mais uma vez, faremos uma escolha aleatória da mesma amostra de termômetros.

Qual a probabilidade de que o termômetro escolhido acuse (*no ponto de congelamento da água*), uma leitura superior a $+1,27\text{ °C}$?

Distribuição Normal Padronizada


- A probabilidade de escolher um termômetro que acuse leitura superior a $1,27\text{ }^{\circ}\text{C}$ corresponde à área sombreada da figura
- Se a área total sob a curva da densidade é igual a 1, a área à direita de zero vale metade, isto é, 0,5. Assim, podemos calcular facilmente a área sombreada !




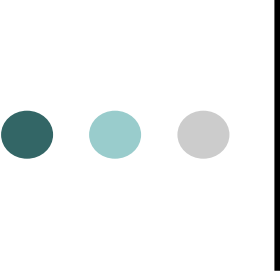


Distribuição Normal Padronizada

EXEMPLO

 Podemos concluir que há uma probabilidade de 10,20% de escolher aleatoriamente um termômetro com leitura superior a $+1,27\text{ }^{\circ}\text{C}$.

 Podemos dizer, ainda, que, em um grande lote de termômetros escolhidos aleatoriamente e testados, 10,20% deles acusarão leitura superior a $+1,27\text{ }^{\circ}\text{C}$



Distribuição Normal Padronizada

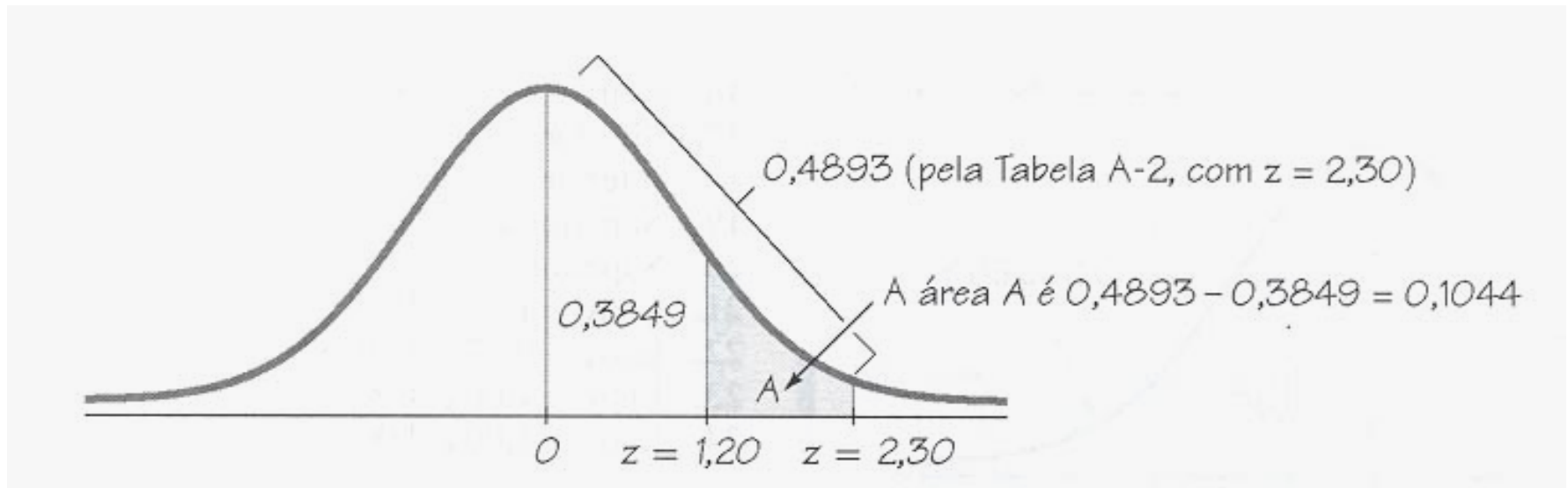
EXEMPLO


De novo, faremos uma escolha aleatória da mesma amostra de termômetros.

Qual a probabilidade de que o termômetro escolhido acuse (*no ponto de congelamento da água*), uma leitura entre 1,20 e 2,30 °C ?

Distribuição Normal Padronizada

- A probabilidade de escolher um termômetro que acuse leitura entre 1,20 e 2,30 °C corresponde à área sombreada da figura
- É fácil perceber que podemos calcular esta área, subtraindo-se a área de 0 até o maior valor (2,30), da área de 0 até o menor valor (1,20), que são lidas na Tabela A-2 !





Distribuição Normal Padronizada

Dos exemplos anteriores, podemos expressar as probabilidades calculadas com a notação seguinte:

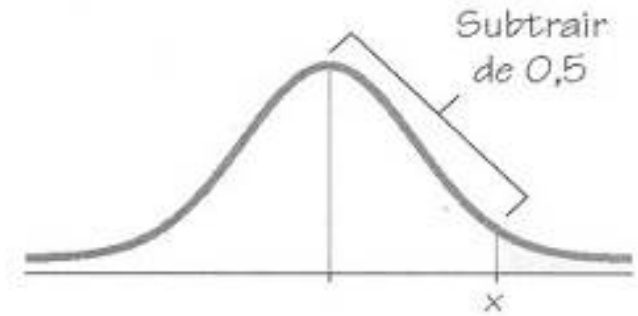
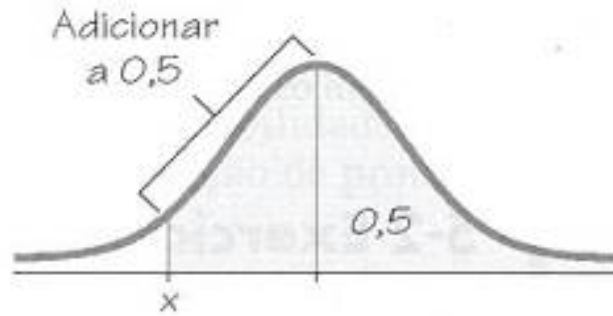
$P(a < z < b)$ denota a probabilidade de o valor de z estar entre a e b

$P(z > a)$ denota a probabilidade de o valor de z ser maior do que a

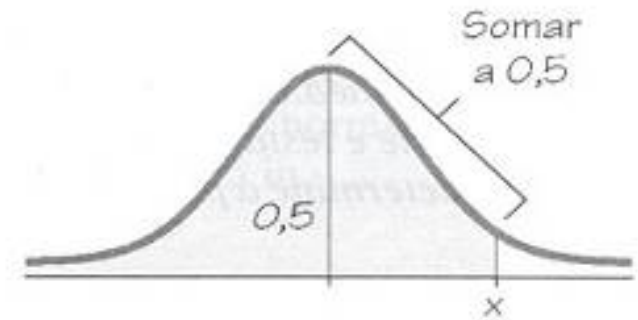
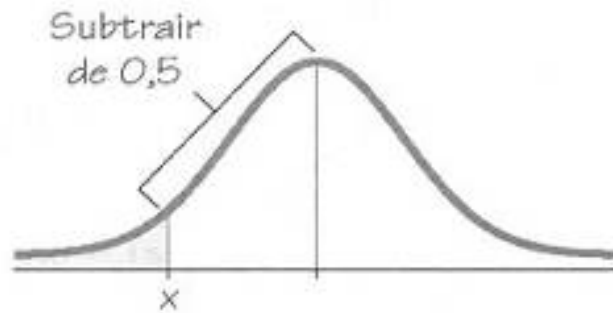
$P(z < a)$ denota a probabilidade de o valor de z ser menor do que a

As figuras abaixo ajudam na interpretação das expressões mais comuns no cálculo de probabilidades:

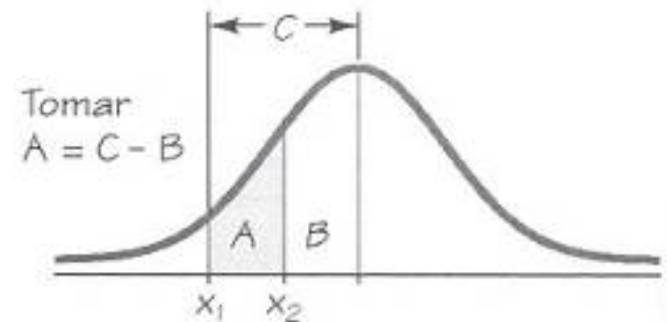
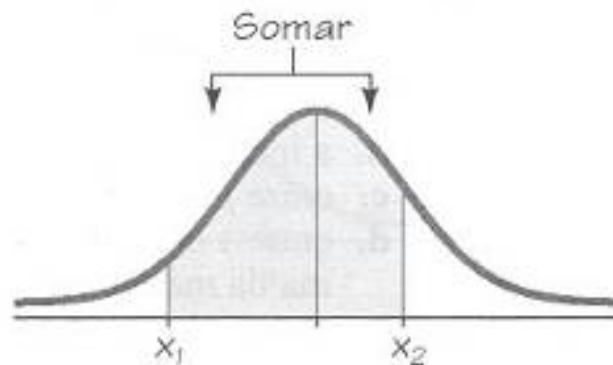
“maior do que x ”
 “pelo menos x ”
 “mais do que x ”
 “não menos do que x ”



“menos do que x ”
 “no máximo x ”
 “não mais do que x ”
 “não maior do que x ”



“entre x_1 e x_2 ”



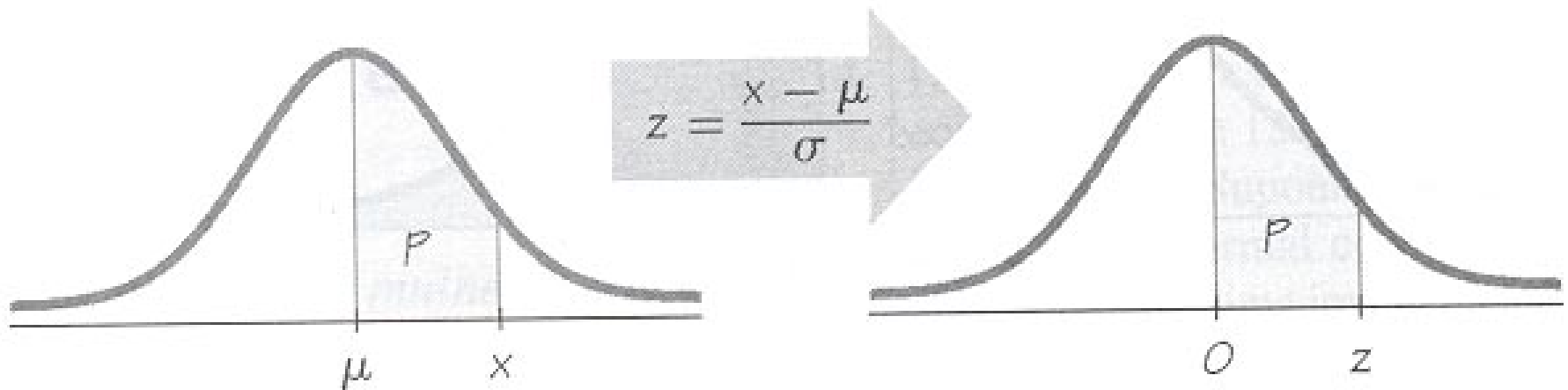


Distribuição Normal Não Padronizada

- Os exemplos feitos com o termômetro não são muito realistas porque a maioria das populações distribuídas normalmente têm média diferente de 0, desvio diferente de 1, ou ambos.
- Como proceder, então, para calcular probabilidades de distribuições normais não-padronizadas ?

Distribuição Normal Não Padronizada

A idéia é utilizar a fórmula dos valores padronizados e *TRANSFORMAR* qualquer distribuição normal dada na normal padronizada, como mostrado abaixo.





Distribuição Normal Não Padronizada

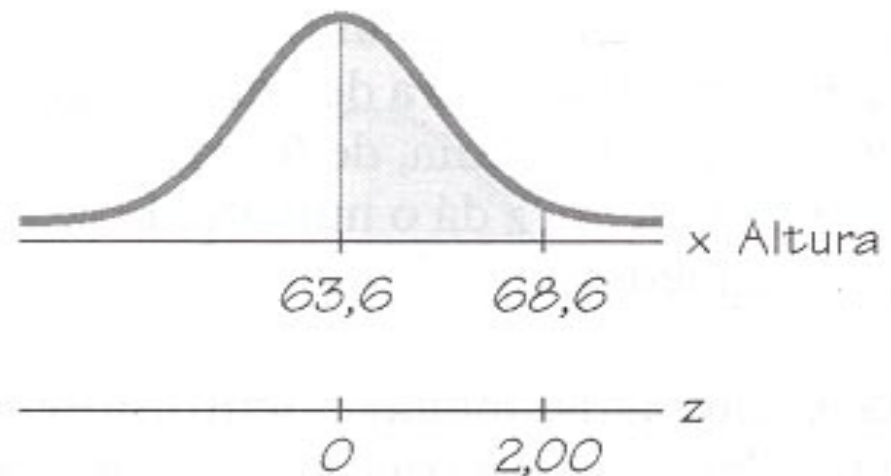
EXEMPLO

As alturas das mulheres americanas segue uma distribuição normal com média de 63,6" e desvio-padrão de 2,5".

Selecionada uma mulher americana ao acaso, qual a probabilidade da sua altura estar entre 63,6 e 68,6 polegadas ?

Distribuição Normal Não Padronizada

- Devemos proceder da maneira descrita a seguir:
 - Trace uma curva normal, assinale a média e outros valores de interesse, e sombreie a região que representa a probabilidade desejada
 - Para cada valor x da fronteira da região sombreada, aplique a fórmula para achar o valor padronizado z
 - Utilize a Tabela A-2 para achar a área da região sombreada





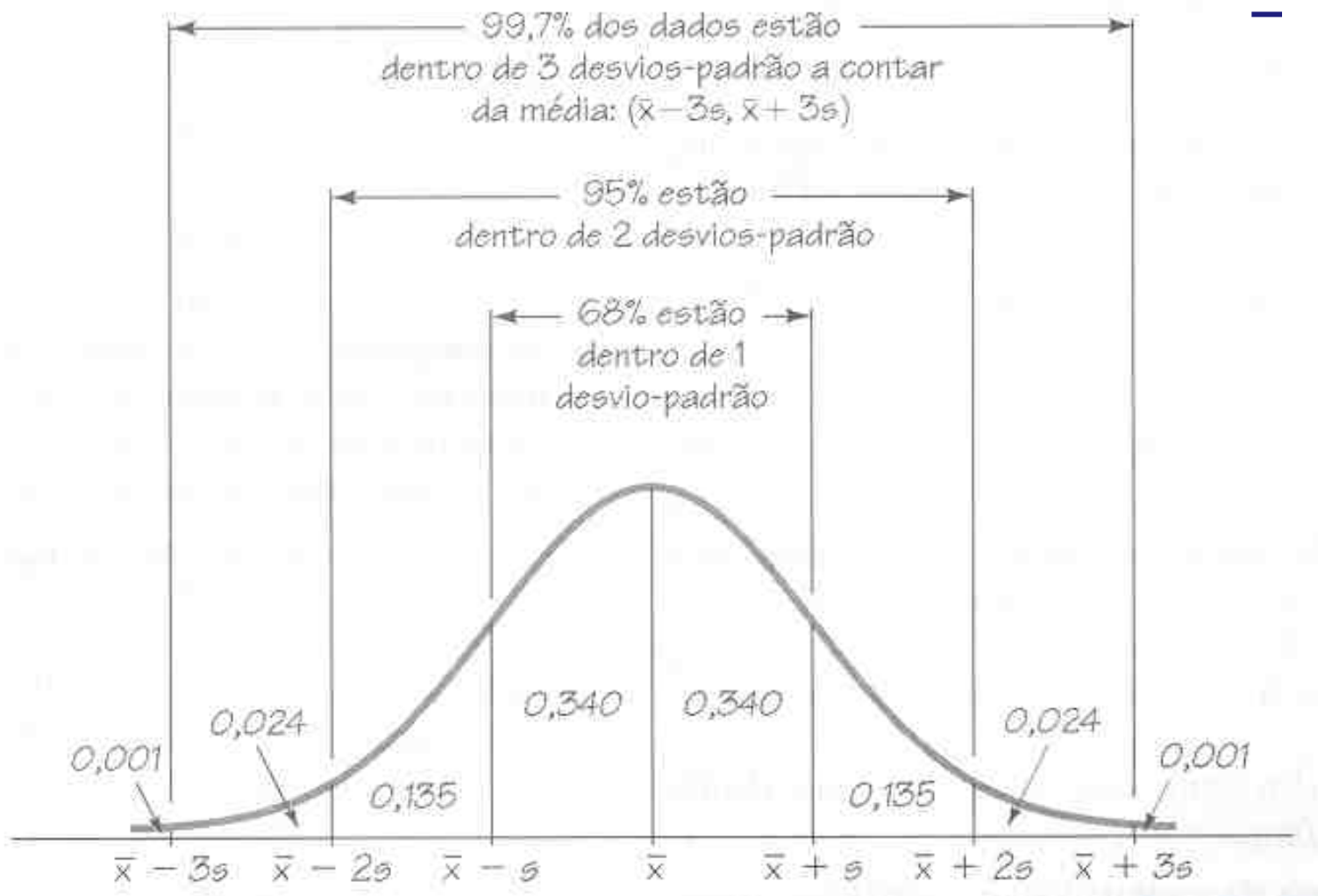
Distribuição Normal Não Padronizada

EXEMPLO

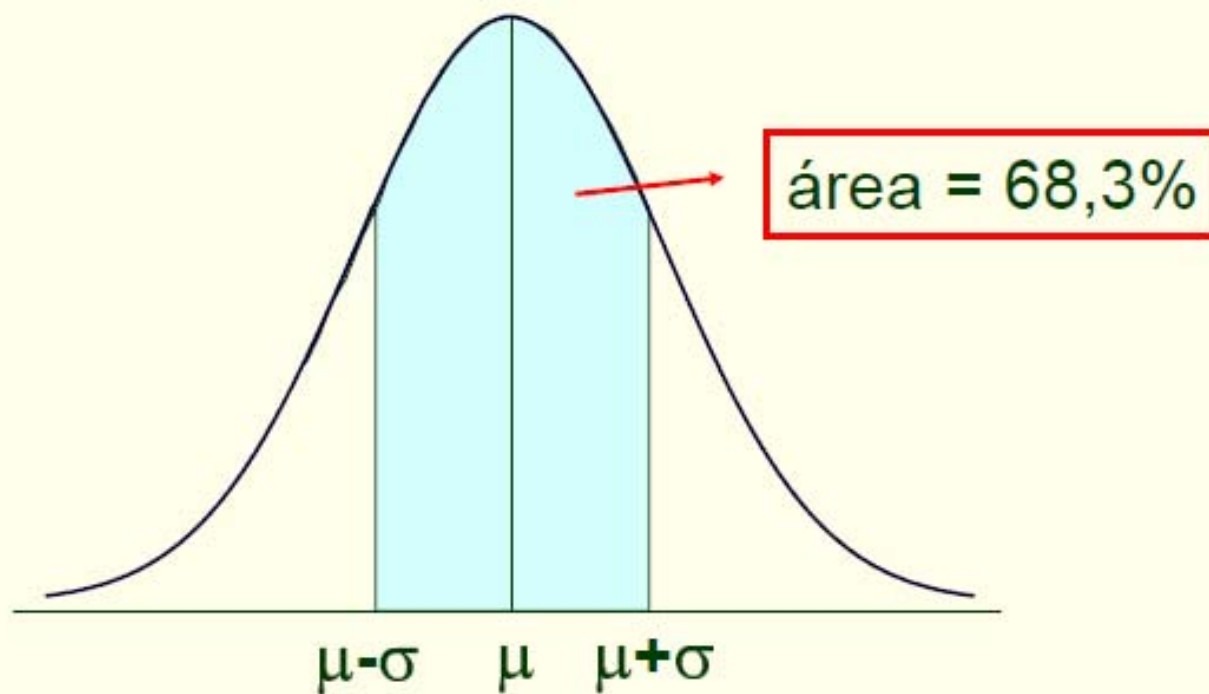
- Há, portanto, uma probabilidade de 0,4772 de escolher uma mulher com altura entre 63,6 pol. e 68,6 pol. Usando a notação, teríamos:
 - $P(63,6 < x < 68,6) = P(0 < z < 2,00) = 47,72\%$
- Outra forma de interpretar este resultado consiste em concluir que 47,72% das mulheres americanas têm altura entre 63,6 pol. e 68,6 pol.

Regra 68-95-99,7

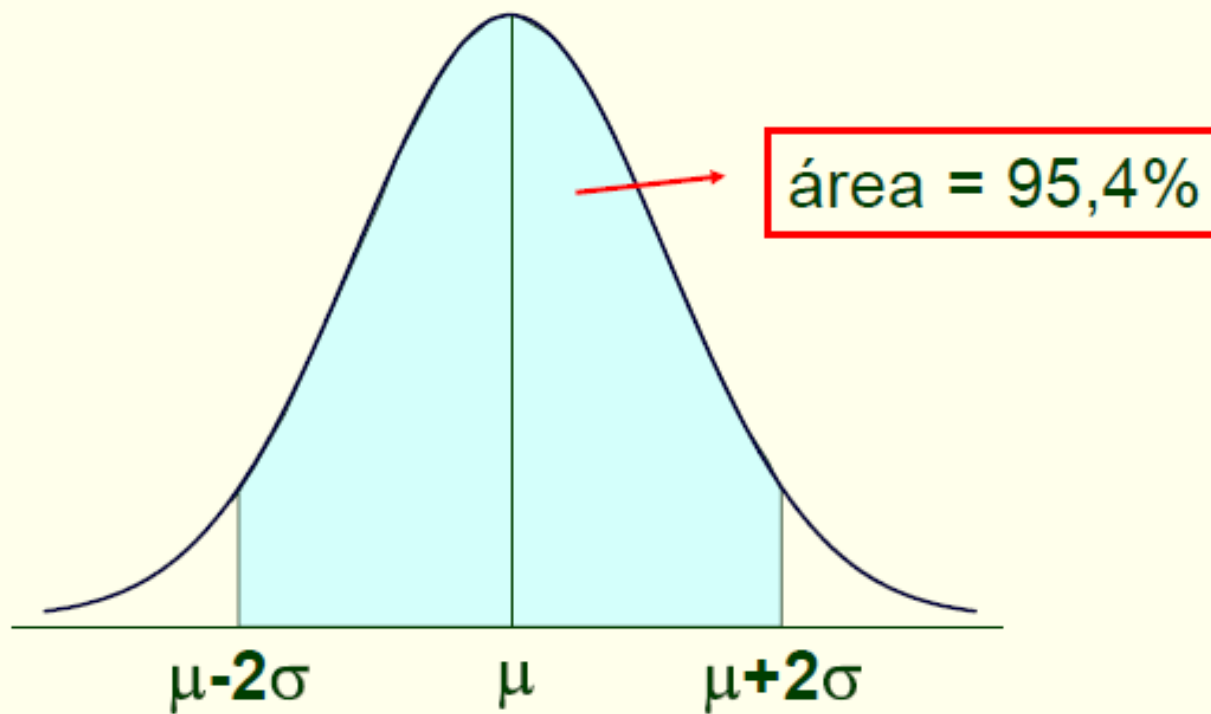
Numa distribuição normal $N(\mu, \sigma)$ ou $N(\bar{x}, s)$



Exemplo



Exemplo



Exemplo

