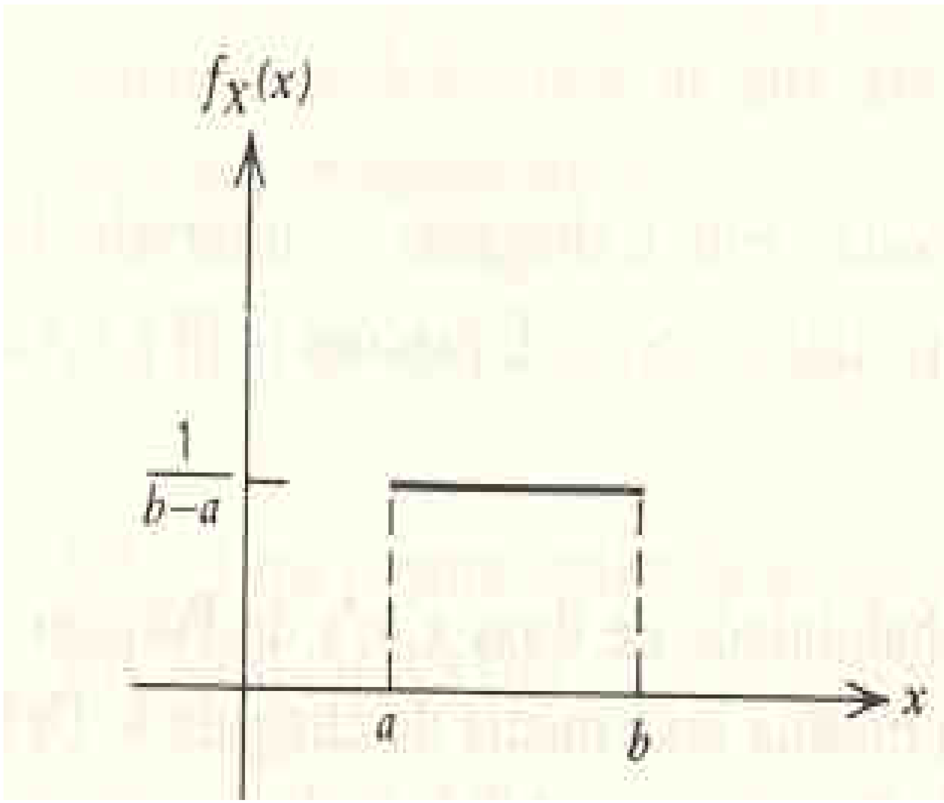
Probabilidade

Distribuições Uniforme, Geométrica, Hipergeométrica e Multinomial

Distribuição Uniforme

- Usada comumente nas situações em que não há razão para atribuir probabilidades diferentes a um conjunto possíveis de valores da variável aleatória em um determinado intervalo
  - tempo de chegada de um vôo
  - distância de posição de cargas em uma ponte, em relação a um pilar terminal
- Usualmente associamos uma distribuição uniforme a uma determinada variável aleatória, simplesmente por falta de informação mais precisa, além do conhecimento do seu intervalo de valores

Distribuição Uniforme



$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad a \le x \le b$$

Distribuição Uniforme

EXEMPLO

- Devido a situações imprevisíveis de tráfego, o tempo que um estudante leva para ir de sua casa à aula matutina segue uma distribuição uniforme entre 22 e 30 minutos.

- Se ele sai de casa precisamente às 7:35 da manhã, qual a probabilidade dele não se atrasar para a aula das 8:00 horas?

Distribuição Uniforme

SOLUÇÃO

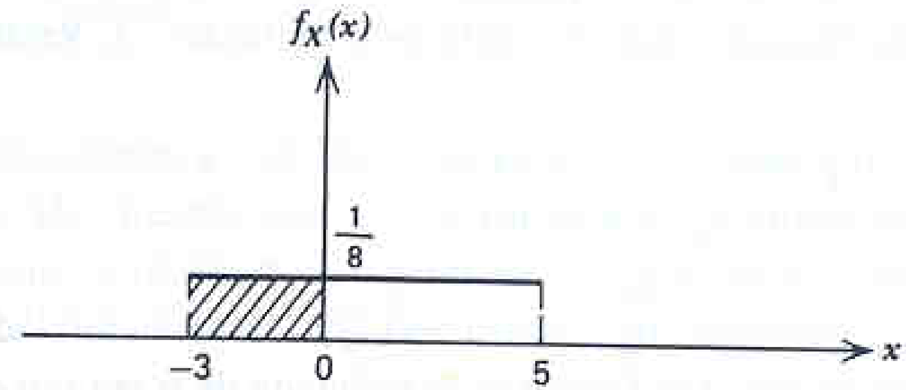
- Seja X o tempo (*minutos*) de chegada do estudante à aula depois de 8:00 horas

- Qual fórmula representa a variável aleatória X ?

$$f(x) = \frac{1}{8} \quad -3 \leq x \leq 5$$

Distribuição Uniforme

- Em termos dos valores de X, qual probabilidade estamos realmente interessados em calcular?
  - ➔ $P\ (\ -3 \leq X \leq 0\ )$!!!



- Do gráfico acima temos que:
  - ➔ $P(\ -3 \leq X \leq 0\ ) = 3\ .\ (1/8) = 3/8$

Distribuição Geométrica

- Aplicada em experimentos que satisfazem a todas as condições de experimentos binomiais, exceto por:
  - Não ter um número finito de provas.

$$P(x) = p.(1-p)^{x-1}$$

Exemplo

- Suponha que a probabilidade de um componente de computador ser defeituoso é de 0,2. Numa mesa de testes, uma batelada é posta à prova, um a um. Determine a probabilidade do primeiro defeito encontrado ocorrer no sétimo componente testado.

$$\boxed{P(7) = 0,2.(1-0,2)^{7-1} = 0,0524}$$

Distribuição Hipergeométrica

- No caso de amostragem sem reposição de uma população finita, não podemos utilizar a Distribuição Binomial, pois não satisfaz ao critério de probabilidade constante (p) em cada experimento. Nestes casos, utilizamos a **Distribuição Hipergeométrica**.

Distribuição Hipergeométrica

- Aplica-se em situações onde:
  - Há N objetos (indivíduos) na população
  - A população divide-se em dois tipos: M objetos do tipo A e $N - M$ objetos do tipo B
  - Escolhe-se uma amostra de tamanho n da população
  - Seja X uma variável aleatória igual ao número de objetos do tipo A na amostra. X tem distribuição hipergeométrica com parâmetros N, M e n
- Ex.: Suponha-se que haja N transistores, dos quais M são MOSFET e N-M são BJT. Extrai-se uma amostra aleatória de n transistores, sem reposição. Qual a probabilidade de exatamente k transistores serem do tipo MOSFET?

Distribuição Hipergeométrica

- Aplica-se em situações onde:
  - Há *N* objetos (indivíduos) na população
  - A população divide-se em dois tipos: *M* objetos do tipo *A* e *N* – *M* objetos do tipo *B*
  - Escolhe-se uma amostra de tamanho *n* da população
  - Seja *X* uma variável aleatória igual ao número de objetos do tipo *A* na amostra. *X* tem distribuição hipergeométrica com parâmetros *N*, *M* e *n*

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Distribuição Hipergeométrica

$$\boxed{P(x) = \frac{\dfrac{A!}{(A-x)!\,x!} \cdot \dfrac{B!}{(B-n+x)!\,(n-x)!}}{\dfrac{(A+B)!}{(A+B-n)!\,n!}}}$$

- A objetos de um tipo
- B objetos restantes de outro tipo
- *n* objetos extraídos sem reposição
- x: objetos do tipo A

Exemplo 1

- Numa Loteria, um apostador escolhe 6 números de 1 a 54. Qual a probabilidade dele acertar 5 números?
  - M=6; N-M=48; n=6; x=5

$$P(x) = \frac{\dfrac{6!}{(6-5)!5!} \cdot \dfrac{48!}{(48-6+5)!(6-5)!}}{\dfrac{(6+48)!}{(6+48-6)!6!}} = \frac{288}{25827165} = 1{,}1151x10^{-5}$$

Exemplo 2

- Na Mega-Sena, um apostador escolhe 7 dezenas dentre 60. Qual a probabilidade dele acertar as 6 dezenas corretas? Compare com a probabilidade dele acertar as 6 dezenas jogando apenas 6 dezenas.
  - M=6; N-M=60-6=54; n=7; x=6

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{6}\binom{60-6}{7-6}}{\binom{60}{7}} = \frac{54}{386206920} = 1,3982 \cdot 10^{-7}$$

Exemplo 2

- Comparando com a probabilidade de acertar 6 dezenas, jogando apenas 6:
  - M=6; N-M=60-6=54; n=6; x=6

$$P(X=6)=\frac{\binom{6}{6}\binom{60-6}{6-6}}{\binom{60}{6}}=\frac{1}{50063860}=1{,}9974\cdot 10^{-8}$$

Preços das Jogadas na Mega-Sena

Dezenas	Aposta	Valor
6	1	1,50
7	7	10,50
8	28	42,00
9	84	126,00
10	210	315,00
11	462	693,00
12	924	1.386,00
13	1716	2.574,00
14	3003	4.504,50
15	5005	7.507,50

Fonte: www.caixa.gov.br Acesso em 04.04.2006

Exemplo 2

- Dividindo a probabilidade de acertar 6 jogando 7, com a probabilidade de acertar 6 jogando 6, tem-se:

$$\boxed{\frac{1{,}3982 \cdot 10^{-7}}{1{,}9974 \cdot 10^{-8}} \approx 7}$$

Isto significa que, jogando 7 dezenas, tem-se uma chance 7 vezes maior de acertar as 6 dezenas corretas. Com efeito, o preço pago por um cartão de 7 dezenas é 7 vezes maior que o preço de um cartão com 6 dezenas!

Distribuição Multinomial

- A Distribuição Binomial se aplica apenas nos casos que envolvem mais que 2 tipos de resultados. A **Multinomial** envolve mais que duas categorias.
- Por exemplo, para três resultados:

$$P(x) = \frac{n!}{(x_1!).(x_2!).(x_3!)}.p_1^{x_1}.p_2^{x_2}.p_3^{x_3}$$

Exemplo

- Um experimento de genética envolve 6 genótipos mutuamente excludentes identificados por A, B, C, D, E e F, todos igualmente prováveis. Testados 20 indivíduos, determine a probabilidade de obter exatamente:
  - 5 A; 4 B; 3 C; 2 D; 3 E; 3 F

$$P(x) = \frac{20!}{5!.4!.3!.2!.3!.3!}.(1/6)^5.(1/6)^4.(1/6)^3.(1/6)^2.(1/6)^3.(1/6)^3$$

$$P(x) = 0{,}000535$$