

Probabilidade

Multiplicação e Teorema de Bayes



Regra da Multiplicação

- Num teste, são aplicadas 2 questões de múltipla escolha. Na primeira questão, as respostas possíveis são V ou F. Na segunda, a, b, c, d ou e. Se um aluno decidir “chutar” a respostas, quantas alternativas terá?
 - 1o passo: 2 alternativas $\Rightarrow m$
 - 2o passo: 5 alternativas $\Rightarrow n$
 - Alternativas possíveis: $m \times n = 2 \times 5 = 10$ alternativas de respostas diferentes.
- Considerando a probabilidade de acertar ambas questões:
 - $P(\text{acerto}) = 1/10 = 0,1$



Regra da Multiplicação

- Considerando as respostas individualmente:
 - $P(\text{acerto na 1o questão}) = \frac{1}{2}$
 - $P(\text{acerto na 2o questão}) = \frac{1}{5}$
 - Como $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} \dots$
 - Verificamos que:
 - **$P(\text{acerto 1}^\circ \text{ e acerto 2}^\circ) = P(\text{acerto 1}^\circ) \times P(\text{acerto 2}^\circ)$**

Contudo, nem sempre as relações entre os experimentos A e B acontecem de forma *independente*.

Regra da Multiplicação

- O interesse agora é estimar a probabilidade de dois eventos ocorrerem em passos distintos.
- A palavra-chave aqui é a conjunção “**E**”
 - $P(A \text{ e } B) = P(\text{ocorrência de } A \text{ e de } B)$
 - Exemplo: sair duas faces ímpares no arremesso de dois dados (J e K)

$$P(\text{J ímpar } \underline{\text{e}} \text{ K ímpar}) = P(\text{J ímpar}) \times P(\text{K ímpar})$$



Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 peças, das quais 6 são defeituosas. Se escolhermos duas peças aleatoriamente, qual a probabilidade de ambas serem boas?

$$P(1^{\circ} \text{ peça boa } E \text{ } 2^{\circ} \text{ peça boa}) = ???$$

Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 peças, das quais 6 são defeituosas. Se escolhermos duas peças aleatoriamente, qual a probabilidade de ambas serem boas?

$$P(1^{\circ} \text{ peça boa } E \text{ } 2^{\circ} \text{ peça boa}) = ???$$

$$P(1^{\circ} \text{ peça boa}) = 44/50 = 0,88$$

$$P(2^{\circ} \text{ peça boa}) = 43/49 = 0,8775$$

$$\text{Regra da Multiplicação: } 2 \text{ passos} \rightarrow 0,88 * 0,8775 = \mathbf{0,7722}$$



Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 transistores, dos quais 6 são defeituosos. Se realizarmos duas retiradas de peças aleatoriamente e em seqüência, **com reposição** – considerar que o transistor da primeira retirada é repostado ao lote antes da segunda retirada – qual a probabilidade de ambas serem boas?



Regra da Multiplicação

- Um fabricante produz um lote de 50 transistores, dos quais 6 são defeituosos. Se realizarmos duas retiradas de peças aleatoriamente e em seqüência, **com reposição** – considerar que o transistor da primeira retirada é repostado ao lote antes da segunda retirada – qual a probabilidade de ambas serem boas?

$$P(1^\circ \text{ transistor bom}) = 44/50 = 0,88$$

$$P(2^\circ \text{ transistor bom}) = 44/50 = 0,88$$

$$\text{Regra Multiplicação: } 2 \text{ passos} \rightarrow 0,88 * 0,88 = 0,7744$$



Conclusões

- Que tipo de cuidado devemos tomar ao aplicarmos esta regra para fazer o cálculo?
 - Identificar se o experimento seguinte “B” é **DEPENDENTE** da ocorrência do evento “A”.
- Pela Notação:
 - se $P(B | A) \neq P(B)$
 - Lê-se: $P(B | A) \rightarrow$ Probabilidade de B tal que A tenha ocorrido (ou *dado* que A tenha ocorrido)
- Portanto, a Regra da Multiplicação é:
 - $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B | A)$



Exemplo 3

- Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas), determine a probabilidade de que na primeira carta seja um Ás e a segunda um Rei, considerando:
 - Com reposição
 - Sem reposição



Exemplo 3

- Retirando duas cartas de um baralho (52 cartas), determine a probabilidade de que na primeira carta seja um Ás e a segunda um Rei, considerando:
 - Com reposição
 - Sem reposição

Com reposição

$$P(\text{ás}) = 4/52$$

$$P(\text{Rei}) = 4/52$$

$$4/52 * 4/52 = 0,0059$$

Sem reposição

$$P(\text{ás}) = 4/52$$

$$P(\text{Rei}) = 4/51$$

$$4/52 * 4/51 = 0,0060$$



Eventos Independentes

- Nos exemplos anteriores, ilustra-se o princípio de que a probabilidade do evento B é **DEPENDENTE** do fato do evento A já ter ocorrido. Com base nesta relação, podemos diferenciar **EVENTOS DEPENDENTES** e **INDEPENDENTES**.
- Dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de um deles **NÃO** afeta a probabilidade de ocorrência do outro.



Eventos Independentes

INTUITIVA

- Multiplicamos a probabilidade de ocorrência de A pela probabilidade de ocorrência de B, que deve ser calculada considerando a ocorrência prévia de A

FORMAL

- $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B) \rightarrow$ Somente se A e B são independentes
- $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A) \rightarrow$ Regra da Multiplicação



Comentário 1

- As mesmas regras podem ser aplicadas em mais de dois eventos (3 ou mais)
 - Probabilidade de obtermos 3 ases em 3 extrações de cartas de baralho, sem reposição
 - $P(3 \text{ ases}) = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} = 0,000181$



Comentário 2

- Em casos onde são extraídas amostras de grandes populações, os resultados de eventos dependentes e independentes se aproximam e assim podem ser considerados independentes
 - Ex.: pesquisa eleitoral



Probabilidade Condicional

- Em eventos dependentes:
 - $P(A \text{ e } B) = P(A) * P(B|A)$
- $P(B|A) \rightarrow$ probabilidade de ocorrer B condicionado à ocorrência anterior de A. Assim, a probabilidade de $P(B|A)$ pode ser definida como:

$$P(B | A) = P(A \text{ e } B) / P(A)$$

A probabilidade condicional de B *dado* A é a probabilidade de ocorrência do evento B, sabendo que o evento A já ocorreu.

Probabilidade Condicional

- Na realidade, através da probabilidade condicional, delimitamos o espaço amostral de ocorrência de um evento que depende de outro

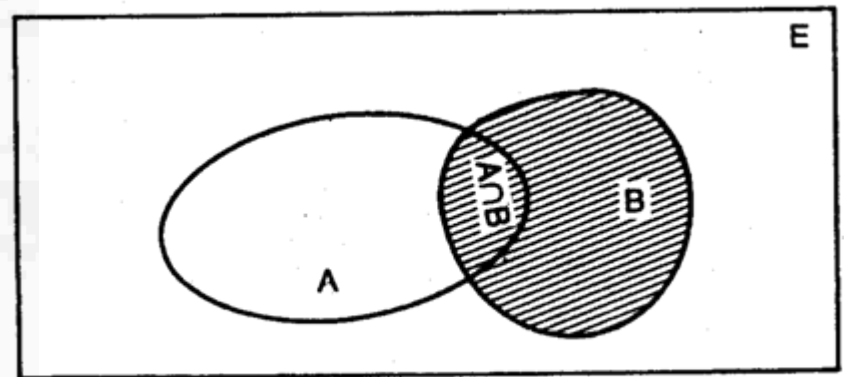
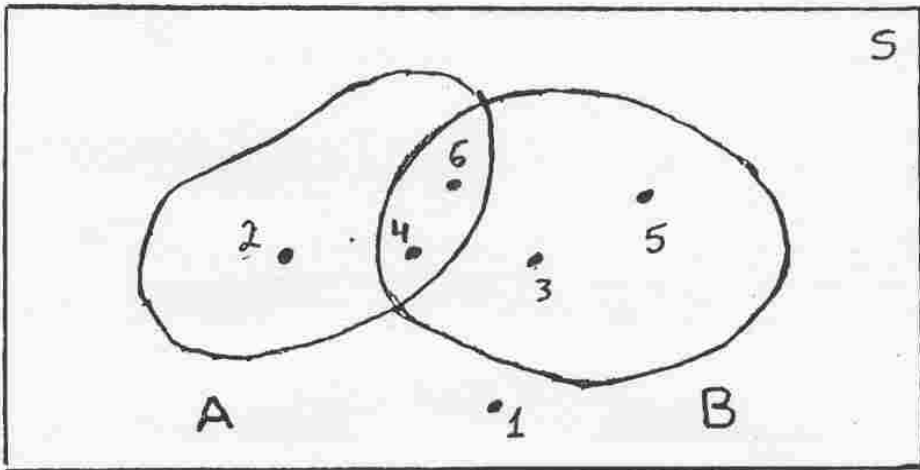


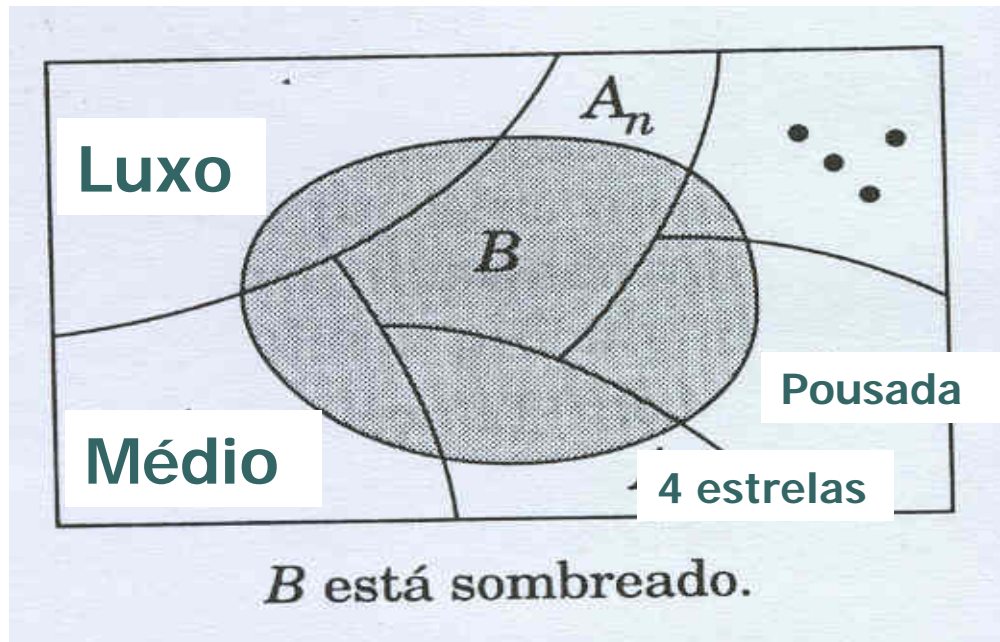
Fig. 4.7 $P(A|B)$.



Exemplo

- Qual a probabilidade de um hotel apresentar uma taxa de ocupação num determinado mês entre 40 e 50%?
 - Esta pergunta abre respostas diversas, já que não delimitamos o tipo de hotel – luxo, médio, pousada, rural, praia,...
- Contudo, se perguntássemos: Qual a probabilidade de um hotel padrão luxo apresentar uma taxa de ocupação num determinado mês entre 40 e 50%?
 - O espaço amostral está delimitado à análise de hotéis de luxo.

Exemplo



$B \Rightarrow$ Frequência de Hotéis com taxa de Ocupação ente 40 a 50%



Probabilidade Condicional

○ Teste de Independência

- Se $P(B|A) = P(B)$

- Ocorrência do evento A não influi na probabilidade do evento B

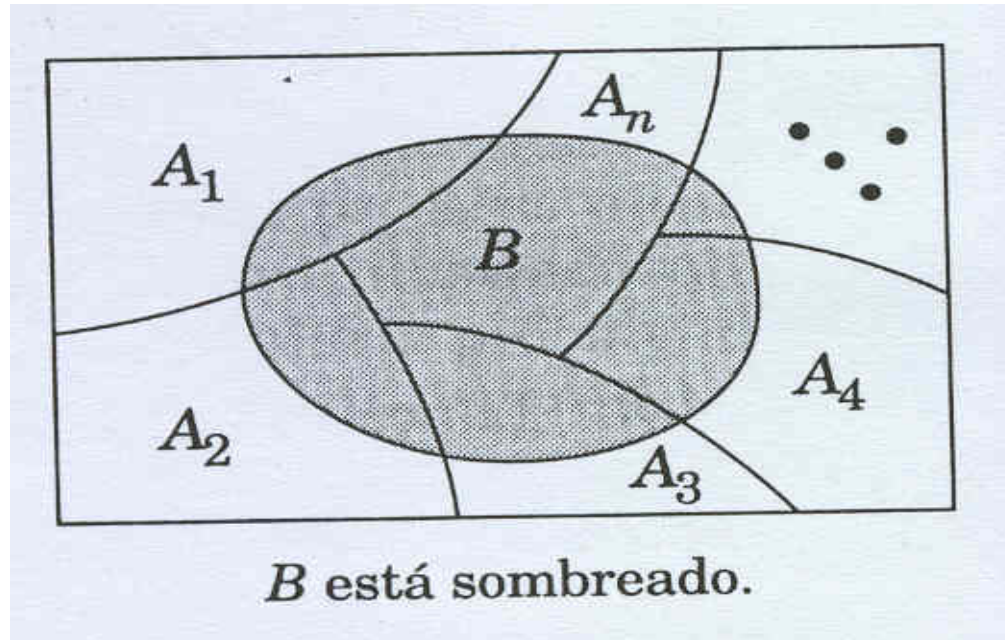
- Se $P(B|A) \neq P(B)$

- Então A e B são eventos dependentes

- Ou seja:

- $P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ independentes
- $P(A \text{ e } B) \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ dependentes

Partição de um Espaço Amostral



$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

Conseqüentemente:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$



Partição de um Espaço Amostral

- Assim, pela Regra da Multiplicação podemos escrever:

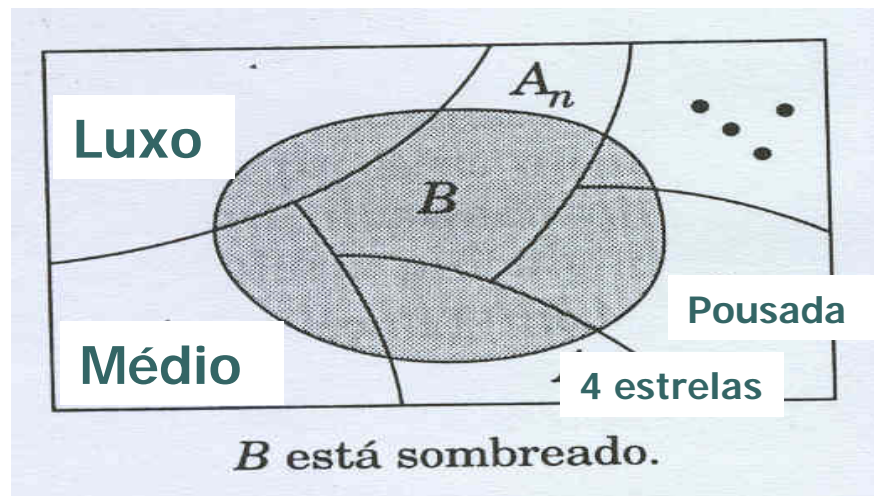
$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)$$

- Esta afirmação somente é válida quando A e B são eventos mutuamente excludentes

Teorema de Bayes

○ $P(B|A_i) \neq P(A_i|B)$

- Probabilidade de um hotel ter 40 a 50% de ocupação dado ser de luxo
 - Analisa a probabilidade de um hotel de luxo ter 40 a 50% de ocupação
- Probabilidade de um hotel ser de luxo entre hotéis que tenham 40 a 50% de ocupação
 - Analisa a probabilidade de um hotel ser de luxo entre todos os hotéis que apresentaram 40 a 50% de ocupação



Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) \neq P(B|A_i)$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

e

$$P(B/A_1) = \frac{P(A \cap B)}{P(A_1)}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A_1/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)$$

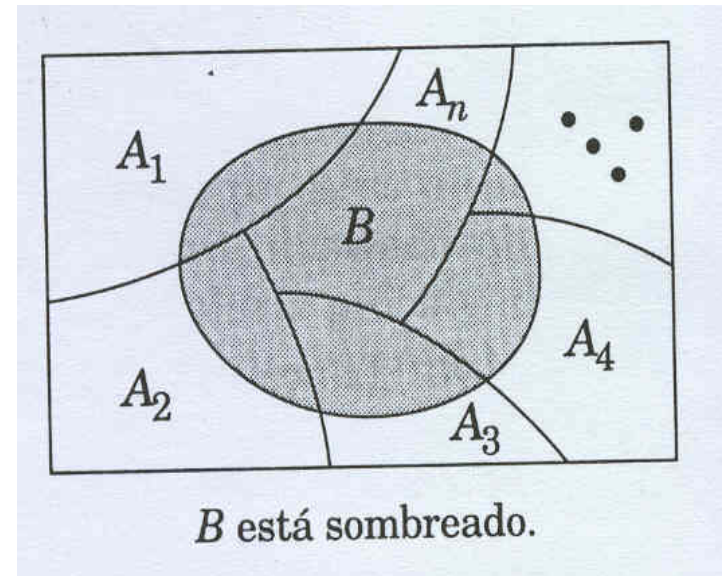
Portanto: $P(B) \cdot P(A_1/B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1)$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(B)}$$

Mas como muitas vezes não dispomos de $P(B), \dots$

Podemos usar:
$$P(B) = P(A_1)P(B | A_1) + P(A_2)P(B | A_2) + \dots + P(A_n)P(B | A_n)$$
$$= \sum P(A_i) P(B | A_i)$$

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum P(A_i) P(B | A_i)}$$



Este é o famoso Teorema de Bayes



Teorema de Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i) P(B | A_i)}{\sum P(A_i) P(B | A_i)}$$

Exemplo

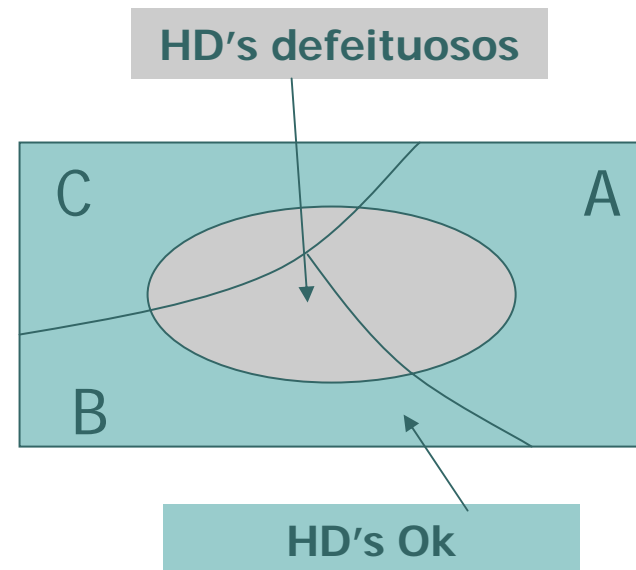
Um fabricante produz HDs em três fábricas (A, B e C), que respondem, respectivamente, por 40%, 35% e 25% de sua produção total.

Registros históricos indicam que 2% da produção de A é defeituosa, assim como 1% da de B, e 3% da fábrica C.

Escolhemos 1 HD aleatoriamente, e ele é defeituoso.



Qual a probabilidade dele ter sido produzido na fábrica B ?

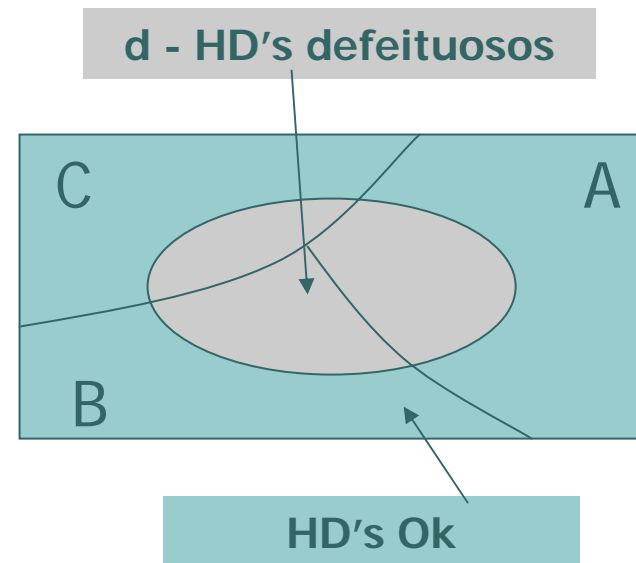


Teorema de Bayes

- Chamando B o evento “fabricado em B” e d o evento “HD defeituoso”, podemos escrever:
- Uma peça defeituosa pode provir de qualquer uma das 3 fábricas (e só de uma !). Logo, eventos mutuamente excludentes.
- Portanto:

$$P(d) = P(A)P(d|A) + P(B)P(d|B) + P(C)P(d|C)$$

$$P(B|d) = \frac{P(B \cap d)}{P(d)} = \frac{P(B) P(d|B)}{P(d)}$$





Teorema de Bayes

- Assim, de acordo com os valores fornecidos, temos que:

$$P(d) = (0,40 \times 0,02) + (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,03) = 0,019$$

- E, portanto,

$$P(B|d) = \frac{(0,35 \times 0,01)}{(0,40 \times 0,02) + (0,35 \times 0,01) + (0,25 \times 0,03)} = 0,184 = 18,4\%$$

Teorema de Bayes

A visualização deste problema é simplificada pela utilização dos “Diagramas em Árvore”

