

Probabilidade

Contagem



Problema da Contagem no Estudo da Probabilidade

- Conforme definição clássica, podemos determinar uma probabilidade calculando a relação entre o total de eventos de sucesso e o total de eventos possíveis. Entretanto, observe:
 - Encontrar quantos conjuntos de Grupo Sanguíneo e Rh existem, OU quantos caminhos diferentes podemos fazer entre 3 cidades é FÁCIL...
 - Mas, o que dizer do número de caminhos possíveis entre 7 cidades?
- Em muitos casos, **PRECISA-SE DE UM MEIO PRÁTICO DE CALCULAR TANTO O NÚMERO TOTAL DE POSSIBILIDADES, QUANTO DE SUCESSOS.**



Multiplicação

- Dados dois eventos, o primeiro dos quais pode ocorrer de m maneiras distintas e o segundo pode ocorrer de n maneiras distintas:
 - Então, os dois eventos conjuntamente podem ocorrer de $(m \times n)$ maneiras distintas.
- Uma maneira de visualizar esta regra é utilizar diagramas em árvores para representar as seqüências de opções.

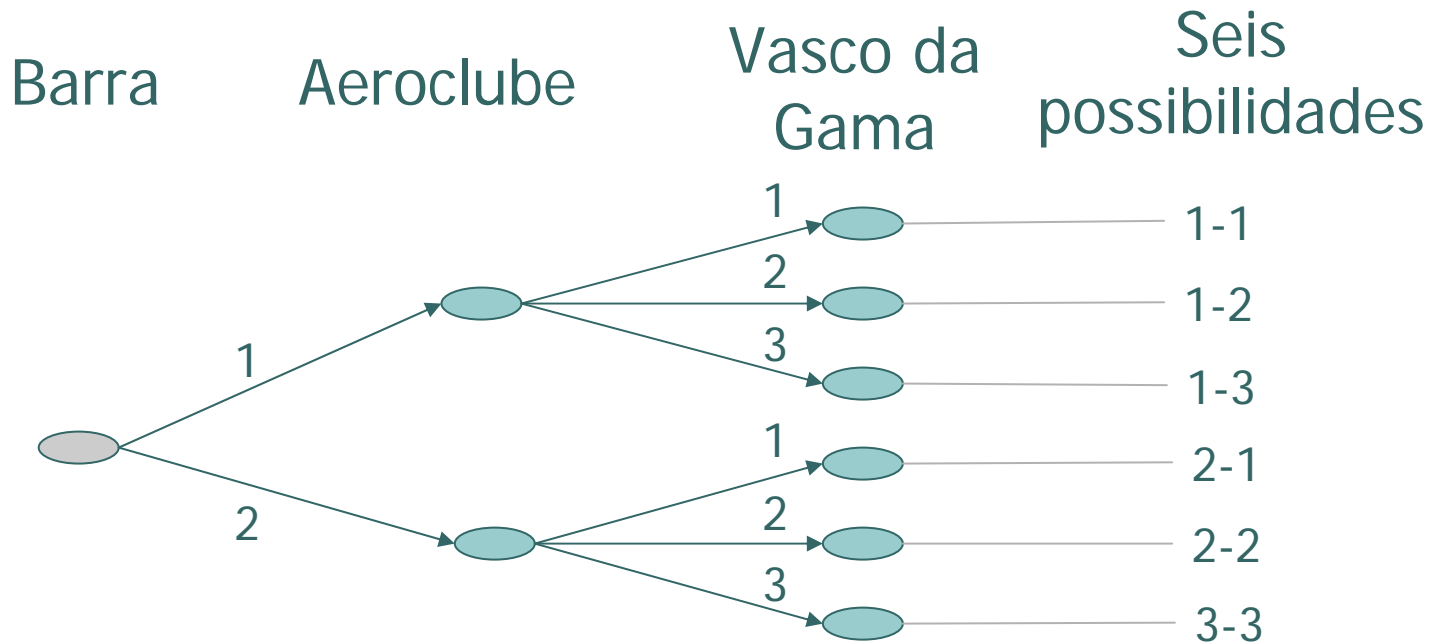


Exemplo 1

- Uma pessoa pode ir da Barra até o Aeroclubes por dois caminhos: orla ou Iguatemi. Do aeroclube, ela pode ir à Av. Vasco da Gama por 3 caminhos: orla, Bonocô ou Av. ACM. Quantas alternativas tem esta pessoa de sair da Barra, ir ao aeroclube e então seguir para a Vasco da Gama?
 - 1o trecho – 2 maneiras
 - 2o trecho – 3 maneiras
 - Total: $2 \times 3 = 6$ maneiras

Exemplo 1

Podemos resolver esta questão utilizando o *Diagrama de Árvore*





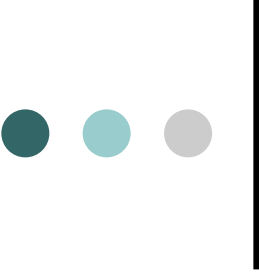
Exemplo 2

- Se uma agência de viagens oferece pacotes especiais de fim de semana para 12 cidades diferentes, por avião, trem ou ônibus, de quantas maneiras diferentes pode-se programar uma viagem?
 - 12 cidades
 - 03 maneiras de viagem diferentes
 - Programações: $12 \times 03 = 36$ programações diferentes



Exemplo 3

- Se uma sorveteria oferece mini-sundaes com escolha de 20 sabores diferentes, associados a oito coberturas diferentes, de quantas maneiras um cliente pode pedir um mini-sundae?
 - 20 sabores
 - 08 coberturas
 - Tipos de mini-sundaes: $20 \times 8 = 160$ tipos



Multiplicação – Regra Geral

E se tivermos mais que dois passos?

Se uma escolha consiste de k Passos, o primeiro dos quais pode ser realizado de n_1 maneiras, o segundo de n_2 maneiras, ..., ou seja, para cada um destes, o n -ésimo passo pode ser realizado de n_k maneiras, então a escolha global pode ser feita de:

$n_1 * n_2 * \dots * n_k$ maneiras



Exemplo 4

- Um teste consiste de 15 questões do tipo múltipla escolha, cada uma apresentando quatro respostas possíveis. De quantas maneiras possíveis pode um estudante marcar as respostas do teste?
 - $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 \dots n_{15} = 4$
 - $4^{15} = 1.073.741.824$



Exemplo 5

- Com base no exemplo 4, quantas alternativas existem para alguém errar todas as questões?
 - Em cada questão há três alternativas de erro. Assim:
 - $3^{15} = 14.348.907$ alternativas com todas as respostas errada



Regra do Fatorial

- Um vendedor de computadores deseja visitar 3 cidades distintas (A, B, C). Quantos caminhos são possíveis?
- Há 3 escolhas para a primeira cidade. Após, há 2 escolhas para a segunda cidade. Então, há somente 1 escolha para a terceira cidade: $3 * 2 * 1 = 6$



Regra do Fatorial

- Uma coleção de n objetos diferentes pode ser ordenada de $n!$ maneiras distintas.
 - o primeiro objeto pode ser escolhido de n maneiras diferentes, o segundo de $(n-1)$ maneiras distintas, e assim por diante.
 - O símbolo fatorial ! denota o produto dos números em ordem decrescente. Ex.: ($4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$)
 - Neste caso, a ORDEM de todos os elementos IMPORTA.



Exemplo 6

- Ao planejar pesquisas, os entrevistadores procuram minimizar o efeito causado pela ordem em que as questões são apresentadas. Isso porque algumas questões influenciam as respostas das questões seguintes.
- Se o Gallup planeja fazer uma pesquisa junto a consumidores formulando 5 questões aos entrevistados, quantas versões distintas da pesquisa são necessárias de modo a incluir todas as ordenações?
 - Resp.: 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 = 5!



Exemplo 7

- Desejamos organizar quatro pessoas em uma fila. De quantas alternativas poderão ser feitas as filas?

- $4! = \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} = 24$ filas diferentes

- Solução:

ABCD

ABDC

ACBD

ACDB

ADBC

ADCB

BACD

BADC

BCAD

BCDA

BDAC

BDCA

CABD

CADB

CBAD

CBDA

CDAB

CDBA

DABC

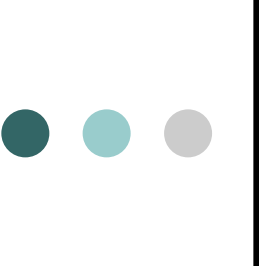
DACB

DBAC

DBCA

DCAB

DCBA



Problema do Caixeiro Viajante

- Uma rede local de computadores tem 50 nós de rede. De quantas maneiras podem estes nós serem interconectados?
- Solução: $50! = 3 \cdot 10^{64}$



Arranjos ou Permutações

- E quando apenas a ordem de uma parte dos elementos importa?
- Ex.: Quantos caminhos diferentes há entre 4 cidades dentre 50 cidades diferentes?
- O número de permutações de r objetos extraídos de um conjunto de n objetos distintos é:

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$



Exemplo 8

- Duas pessoas serão escolhidas, dentre quatro, para ocuparem dois cargos em uma certa empresa: presidente e diretor. Quantas nomeações poderão ser feitas ?

- Solução:

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

- Para o primeiro cargo: 4
- Para o segundo cargo: 3
- Logo, $\underline{4} \times \underline{3} = 12$ nomeações ou ${}_n P_r = 4!/(4-2)! = 4 \times 3$

Exemplo 8 - Comentário

- Note que poderíamos ter selecionado as nomeações escolhendo os dois primeiros lugares das filas: o primeiro para presidente e o segundo para diretor.

ABCD	BACD	CABD	DABC
ABDC	BADC	CADB	DACB

ACBD	BCAD	CBAD	DBAC
ACDB	BCDA	CBDA	DBCA

ADBC	BDAC	CDAB	DCAB
ADCB	BDCA	CDBA	DCBA

- As filas de mesma célula produzem nomeações iguais !!!



Combinações

- E quando a ORDEM não interessa?
- O número de combinações de r elementos extraídos de um conjunto de n objetos diferentes é

$${}_n C_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Exemplo 9

- Digamos, agora, que duas pessoas serão escolhidas, dentre quatro, para ocuparem dois cargos em uma certo conselho ou comissão. Quantas nomeações poderão ser feitas ?

- Solução:

AB	<u>BA</u>	<u>CA</u>	<u>DA</u>
AC	BC	<u>CB</u>	<u>DB</u>
AD	BD	CD	<u>DC</u>

- Como a ordem de escolha NÃO IMPORTA
- Logo, $\underline{3} \times \underline{2} \times 1 = 6$ comissões
- OU ${}_n C_r = 4! / 2!(4-2)!$



Comentário Exemplo 9

- Em comissões, as posições ocupadas NÃO são ordenadas. Ou seja, combinações de elementos (AB ou BA) não são diferenciadas.



Exemplo 10

- Qual a probabilidade de se ganhar o primeiro prêmio da Mega-Sena?
- Devem ser extraídos 6 números diferentes, em qualquer ordem, de um total de 60 possibilidades.

$${}_{60}C_6 = \frac{60!}{(60-6)!6!} = 50.063.860$$

$$P(\text{ganhar}) = \frac{1}{50.063.860}$$