# Medidas de Variação ou Dispersão

# Estatística descritiva

- <u>Recapitulando:</u> As três principais características de um conjunto de dados são:
  - Um valor representativo do conjunto de dados: uma média (Medidas de Tendência Central)
  - Uma medida de dispersão ou variação.
  - A natureza ou forma da distribuição dos dados: sino, uniforme, assimétrica,... (Tabelas de frequência e histogramas)

# Medidas de Variação

- Determina a característica de variação de um conjunto de dados
  - Amplitude
  - Desvio
  - Desvio médio ou desvio absoluto
  - Desvio padrão
  - Variância

# Amplitude

- Diferença entre o maior e o menor valor
  - Subtraia o menor valor do maior
  - Amplitude = 1,88 – 1,60 = 0,28 m

| **Análise Estatística da Turma de Prob. e** | |
|---|---|
| Eventos | x |
| Aluno 1 | 1,72 |
| Aluno 2 | 1,60 |
| Aluno 3 | 1,74 |
| Aluno 4 | 1,88 |
| Aluno 5 | 1,82 |
| Aluno 6 | 1,75 |
| Aluno 7 | 1,82 |
| Aluno 8 | 1,75 |
| Aluno 9 | 1,73 |
| Aluno 10 | 1,75 |
| Aluno 11 | 1,80 |
| Aluno 12 | 1,75 |
| Aluno 13 | 1,73 |
| Aluno 14 | 1,84 |
| Aluno 15 | 1,76 |
| Aluno 16 | 1,78 |
| Aluno 17 | 1,75 |
| Aluno 18 | 1,69 |
| **Soma** | 31,66 |
| **Média** | 1,759 |
| **Amplitude** | 0,28 |

# Desvio e desvio absoluto

- Desvio
  - diferença entre cada valor e a média

$$\boxed{x - \overline{x}}$$

- Desvio médio ou absoluto
  - Média dos desvios em termos absolutos

$$\boxed{\frac{\sum |x - \overline{x}|}{n}}$$

| Análise Estatística da Turma de Prob. e Estatística | | | |
|---|---|---|---|
| Eventos | x | $x-\overline{x}$ | $\lvert x-\overline{x}\rvert$ |
| Aluno 1 | 1,72 | -0,04 | 0,04 |
| Aluno 2 | 1,60 | -0,16 | 0,16 |
| Aluno 3 | 1,74 | -0,02 | 0,02 |
| Aluno 4 | 1,88 | 0,12 | 0,12 |
| Aluno 5 | 1,82 | 0,06 | 0,06 |
| Aluno 6 | 1,75 | -0,01 | 0,01 |
| Aluno 7 | 1,82 | 0,06 | 0,06 |
| Aluno 8 | 1,75 | -0,01 | 0,01 |
| Aluno 9 | 1,73 | -0,03 | 0,03 |
| Aluno 10 | 1,75 | -0,01 | 0,01 |
| Aluno 11 | 1,80 | 0,04 | 0,04 |
| Aluno 12 | 1,75 | -0,01 | 0,01 |
| Aluno 13 | 1,73 | -0,03 | 0,03 |
| Aluno 14 | 1,84 | 0,08 | 0,08 |
| Aluno 15 | 1,76 | 0,00 | 0,00 |
| Aluno 16 | 1,78 | 0,02 | 0,02 |
| Aluno 17 | 1,75 | -0,01 | 0,01 |
| Aluno 18 | 1,69 | -0,07 | 0,07 |
| | Média | Soma desvios | Desvio médio |
| | 1,759 | 0,000 | 0,043 |

# Desvio Padrão

- Desvio padrão – medida da variação dos valores em relação à média.
- Calcule o desvio padrão do conjunto de dados ao lado.
  - Calcule a média;
  - Calcule o DESVIO de cada medida sobre a média

Desvio = $\boxed{x - \bar{x}}$

| Análise Estatística da Turma de Prob. e Estatística | | |
|---|---|---|
| Eventos | x | $x-\bar{x}$ |
| Aluno 1 | 1,72 | -0,04 |
| Aluno 2 | 1,60 | -0,16 |
| Aluno 3 | 1,74 | -0,02 |
| Aluno 4 | 1,88 | 0,12 |
| Aluno 5 | 1,82 | 0,06 |
| Aluno 6 | 1,75 | -0,01 |
| Aluno 7 | 1,82 | 0,06 |
| Aluno 8 | 1,75 | -0,01 |
| Aluno 9 | 1,73 | -0,03 |
| Aluno 10 | 1,75 | -0,01 |
| Aluno 11 | 1,80 | 0,04 |
| Aluno 12 | 1,75 | -0,01 |
| Aluno 13 | 1,73 | -0,03 |
| Aluno 14 | 1,84 | 0,08 |
| Aluno 15 | 1,76 | 0,00 |
| Aluno 16 | 1,78 | 0,02 |
| Aluno 17 | 1,75 | -0,01 |
| Aluno 18 | 1,69 | -0,07 |
| **Soma** | 31,66 | 0,00 |
| **Média** | 1,759 | ------- |


# Desvio Padrão

- Calcule o desvio padrão do conjunto de dados ao lado.
  - Eleve ao quadrado cada uma das diferenças;
  - Some todos os quadrados obtidos

$$\boxed{\sum(x-\bar{x})^2}$$

| Análise Estatística da Turma de Prob. e Estatística | | | |
|---|---|---|---|
| Eventos | x | $x-\bar{x}$ | $(x-\bar{x})^2$ |
| Aluno 1 | 1,72 | -0,04 | 0,0015 |
| Aluno 2 | 1,60 | -0,16 | 0,0252 |
| Aluno 3 | 1,74 | -0,02 | 0,0004 |
| Aluno 4 | 1,88 | 0,12 | 0,0147 |
| Aluno 5 | 1,82 | 0,06 | 0,0037 |
| Aluno 6 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 7 | 1,82 | 0,06 | 0,0037 |
| Aluno 8 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 9 | 1,73 | -0,03 | 0,0008 |
| Aluno 10 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 11 | 1,80 | 0,04 | 0,0017 |
| Aluno 12 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 13 | 1,73 | -0,03 | 0,0008 |
| Aluno 14 | 1,84 | 0,08 | 0,0066 |
| Aluno 15 | 1,76 | 0,00 | 0,0000 |
| Aluno 16 | 1,78 | 0,02 | 0,0004 |
| Aluno 17 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 18 | 1,69 | -0,07 | 0,0047 |
| **Soma** | 31,66 | 0,00 | 0,065 |

# Desvio Padrão

- Calcule o desvio padrão do conjunto de dados ao lado.
  - Divida o total por (n-1), onde n é o número de dados coletados;
  - Extraia a raiz quadrada do resultado anterior

$$\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

Desvio Padrão

| Análise Estatística da Turma de Prob. e Estatística | | | |
|---|---|---|---|
| Eventos | $x$ | $x-\bar{x}$ | $(x-\bar{x})^2$ |
| Aluno 1 | 1,72 | -0,04 | 0,0015 |
| Aluno 2 | 1,60 | -0,16 | 0,0252 |
| Aluno 3 | 1,74 | -0,02 | 0,0004 |
| Aluno 4 | 1,88 | 0,12 | 0,0147 |
| Aluno 5 | 1,82 | 0,06 | 0,0037 |
| Aluno 6 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 7 | 1,82 | 0,06 | 0,0037 |
| Aluno 8 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 9 | 1,73 | -0,03 | 0,0008 |
| Aluno 10 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 11 | 1,80 | 0,04 | 0,0017 |
| Aluno 12 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 13 | 1,73 | -0,03 | 0,0008 |
| Aluno 14 | 1,84 | 0,08 | 0,0066 |
| Aluno 15 | 1,76 | 0,00 | 0,0000 |
| Aluno 16 | 1,78 | 0,02 | 0,0004 |
| Aluno 17 | 1,75 | -0,01 | 0,0001 |
| Aluno 18 | 1,69 | -0,07 | 0,0047 |
| **Soma** | 31,66 | 0,00 | 0,065 |
| **Média** | 1,759 | ------- | ------- |

$$\sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}} = 0{,}062$$

# Desvio Padrão

- De uma amostra

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

- De uma população

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}}$$

**Observação:**

A unidade do desvio padrão é a mesma unidade dos valores originais, ou conjunto de dados.

# Fórmula abreviada para o desvio padrão

$$s = \sqrt{\frac{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}{n(n-1)}}$$

<u>Vantagens e desvantagens:</u>

- Mais conveniente para uso com números extensos e com grandes conjuntos de valores
- Maior facilidade de uso com calculadoras e computadores (apenas três registros: n, $\Sigma x$ e $\Sigma x^2$)
- Elimina erros de arredondamento
- Não evidencia o conceito de desvio médio da fórmula tradicional

# Variância

- Desvio padrão ao quadrado
  - $s^2 \rightarrow$ variância amostral
  - $\sigma^2 \rightarrow$ variância populacional

$$s^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{N}$$

**Observação:**

A unidade da variância é a mesma unidade do conjunto de dados, elevada ao quadrado.

# Considerações finais

- Arredondamento:
  - Tomar uma casa decimal a mais em relação às que constam dos dados originais.
  - Arredondar apenas o resultado final e não os resultados intermediários.
  - Se necessitarmos arredondar os resultados intermediários, acrescente duas casas decimal a mais em relação às que constam dos dados originais


# Para que serve o desvio padrão?

- Indica a dispersão dos dados; quanto mais dispersos, maior o desvio padrão
- Regra prática
  - Desvio padrão ≅ amplitude/4
  - Portanto:
    - valor mínimo ≅ média – 2.(s)
    - Valor máximo ≅ média + 2.(s)
- Teorema de Tchebichev
  - A proporção de qualquer conjunto de dados a menos de K desvios-padrão a contar da média é sempre ao menos $1-1/k^2$, onde k é um número positivo maior do que 1. Para k=2 e k=3, temos:
    - Ao menos ¾ (75%) de todos os valores estão no intervalo de ± 2 desvios-padrão em torno da média
    - Ao menos 8/9 (89%) de todos os valores estão no intervalo de ± 3 desvios-padrão em torno da média


# Medidas de dispersão

- O *coeficiente de variação* indica a magnitude relativa do desvio-padrão quando comparado com a média do conjunto de valores

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \quad \textbf{(amostra)} \qquad\qquad CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad \textbf{(população)}$$

- O *coeficiente de variação* é útil para compararmos a variabilidade (dispersão) de dois conjuntos de dados de ordem de grandezas diferentes

# Medidas de dispersão

- Seja o seguinte conjunto de preços de geladeiras em 7 lojas distintas

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 750,00 | 800,00 | 790,00 | 810,00 | 820,00 | 760,00 | 780,00 |

$$\bar{x} = 787{,}14 \qquad s = 25{,}63$$

- Seja o seguinte conjunto de preços de liquidificadores nas mesmas lojas acima

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50,00 | 45,00 | 55,00 | 43,00 | 52,00 | 45,00 | 54,00 |

$$\bar{x} = 49{,}14 \qquad s = 4{,}81$$

- *Qual dos produtos têm uma maior variabilidade de preços?*

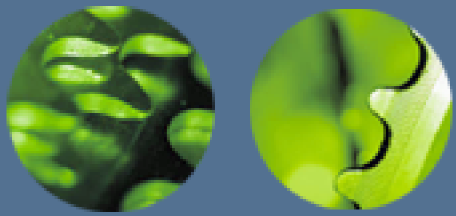
# Medidas de dispersão

- Uma vez que, em geral, uma geladeira custa bem mais que um liquidificador, a tendência é que o desvio-padrão da geladeira seja também maior!

- O coeficiente de variação é uma medida adimensional que normaliza o desvio padrão em relação à média

$$CV_{geladeira} = \frac{25{,}63}{787{,}14} = 3{,}3\% \qquad CV_{liquidificador} = \frac{4{,}81}{49{,}14} = 9{,}8\%$$

- *Com o CV podemos concluir que os preços da geladeira têm uma menor variabilidade que os do liquidificador*



# Medida de Dispersão: Intervalo interquartil (amplitude interquartílica)

- Uma medida de dispersão alternativa que pode ser empregada é o chamado *intervalo interquartil ou amplitude interquartílica*

- É a diferença entre o terceiro e o primeiro quartis

$$D_j = Q_3 - Q_1 = P_{0,75} - P_{0,25}$$

# Medidas de posição e dispersão

- Para o conjunto de valores abaixo:

05; 07; 08; 10; 12; 15; 18; 20; 28; 35; 40; 44

Q1 = 10 Q2 = Md = 16,5 Q3 = 28 Q4 = 44

Dj = 28 - 10 = 18

- Se alterarmos significativamente o último valor:

05; 07; 08; 10; 12; 15; 18; 20; 28; 35; 40; 200

Dj = 28 - 10 = 18 !!!

# Teorema de Tchebichev

- A fração (porcentagem) de QUALQUER conjunto de dados, a menos de K desvios a contar da média, é SEMPRE *ao menos:*

$1 - 1/K^2$ onde $K>1$

- Para k = 2 e k = 3 isto significa, por exemplo:

$$[\bar{x}-2s, \bar{x}+2s]$$ → 75% dos dados

*Ou seja, ao menos ¾ de todos os valores estão neste intervalo*

$$[\bar{x}-3s, \bar{x}+3s]$$ → 89% dos dados

# Teorema de Tchebichev

- Barbeadores elétricos sem fio da marca XYZ têm *vida média* de 8,0 anos, com desvio padrão de 3,0 anos.

- Faça uma estimativa:

  – da vida mais breve =>

  – da vida mais longa =>

- *Tchebichev também é útil para identificar valores "estranhos" em um conjunto de dados:* aqueles que ficam de fora do intervalo !

# Identificando *"outliers"*

- "*<u>Outliers</u>*" são valores "*estranhos*" que se localizam muito distantes da média
- Por isso, as estatísticas descritivas são, usualmente, muito influenciadas ("*contaminadas*") por eles
- Podem se originar em erros de coleta OU em desvios de processo
- Esses outliers devem ser muito bem analisados antes de um possível descarte!

# Identificando *"outliers"*

- Tchebichev pode nos ajudar na identificação de *outliers*

- Valores fora do intervalo de +/- 2s devem ser analisados para um possível descarte

$[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$ → fora deste intervalo, é *estranho*

# Escore padronizado

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- Número de desvios-padrão pelo qual um valor dista da média (para mais ou para menos)

# Exercício

- As alturas da população de homens adultos têm média $\mu=1{,}753$m, desvio padrão $\sigma=0{,}071$m e distribuição gráfica em forma de sino (normal). O jogador de basquete Michael Jordan, que mede 1,98m, pode ser considerado excepcionalmente alto? Determine o escore padrão *z* para ele.

# Resolução

- Calcula-se o escore *z* conforme segue:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1{,}98 - 1{,}752}{0{,}071} = 3{,}21$$

- Este resultado indica que a altura de Michael Jordan está a 3,21 desvios-padrão acima da média da população. Considerando incomuns valores acima ou abaixo de 2 desvios da média, conclui-se que Michael Jordan é de fato excepcionalmente alto comparando com a população geral.