

CAPITULO 1

ANALISIS DE CIRCUITOS CON RESISTORES Y FUENTES DE TENSION O CORRIENTE CONTINUA

1.1 Introducción.

En este capítulo presentamos el sistema de unidades que usaremos en el texto. También estudiaremos algunos conceptos básicos: carga eléctrica, corriente, diferencia de tensión, energía y potencia, leyes de Kirchhoff y al final estudiaremos algunos circuitos sencillos.

Para esta primera parte solo consideramos los dispositivos eléctricos: resistores y fuentes independientes o dependientes bien sean de tensión o corriente. Cada uno de estos dispositivos lo llamamos *elemento*, y la interconexión de varios elementos recibe el nombre de *circuito eléctrico o red eléctrica*.

1.2 UNIDADES

El sistema de unidades que utilizamos en este texto, es el **Sistema Internacional (SI)**, el cual fue adoptado por La Conferencia Internacional de Pesas y Medidas, en París, en 1960. El Sistema Internacional está basado en las unidades primarias mostradas en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Unidades Primarias del SI

Cantidad	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente Eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de una sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Las unidades suplementarias del SI se muestran en la tabla 1.2.

Tabla 1.2 Unidades suplementarias del SI

Cantidad	Unidad	Símbolo
Angulo plano	radián	rad
Angulo sólido	estercoradián	sr

Las unidades derivadas que usaremos se muestran en la tabla 1.3.

Tabla 1.3. Unidades derivadas del SI usadas en el análisis de circuitos eléctricos

Cantidad	Unidad	Símbolo
Energía	joule	J
Potencia	watt	W
Carga Eléctrica	coulomb	C
Tensión eléctrica	volt	V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω
Conductancia eléctrica	siemens	S
Capacitancia eléctrica	farad	F
Inductancia	henry	H
Frecuencia	hertz	Hz
Velocidad angular	radian por segundo	rad/s
Flujo magnético	weber	Wb
Densidad de flujo magnético	tesla	T

Las unidades pueden ser multiplicadas o divididas por potencias de 10, obteniéndose múltiplos o submúltiplos de las unidades respectivas. En la tabla 1.4 se presentan las potencias de 10 utilizadas.

Tabla 1.4 Múltiplos y submúltiplos oficiales

Múltiplo o submult.	Prefijo	Símbolo	Múltiplo o submult	Prefijo	Símbolo
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	mili	m
10^9	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^6	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^3	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^2	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10^1	deca	da	10^{-18}	atto	a

1.3 Conceptos básicos

El primer concepto básico que vamos a presentar es el de **carga eléctrica**, que es una propiedad de las partículas atómicas de las que está compuesta la materia y se mide en coulomb (C).

Un átomo cualquiera tiene electrones, protones y neutrones. El electrón tiene una carga eléctrica negativa de valor $e = -1.602 \times 10^{-19}$ C y el protón tiene una carga eléctrica positiva de igual magnitud a la del electrón. Una carga Q solo puede corresponder a múltiplos enteros de e , esto quiere decir que la carga Q es una variable discreta.

La ley de conservación de la carga establece que la carga eléctrica ni se crea ni se destruye, únicamente se transfiere. Cuando se transfiere carga eléctrica de un lugar a otro se genera una **corriente eléctrica**, i , cuya expresión matemática es

$$i(t) = dq/dt \quad (1.1)$$

y representa la tasa de cambio de la carga eléctrica, q , con respecto al tiempo y se mide en ampere (A).

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$$

Por convención se establece que el sentido positivo de la corriente eléctrica, corresponde al sentido en que fluyen las cargas positivas. En un alambre conductor se establece una corriente debido al movimiento de los electrones libres (cargas negativas) dentro del conductor, luego la corriente eléctrica tendrá un sentido opuesto al del movimiento de los electrones. Si queremos obtener la carga eléctrica transferida en un intervalo de tiempo t_1, t_2 procedemos a integrar la ecuación (1.1)

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt \quad (1.2)$$

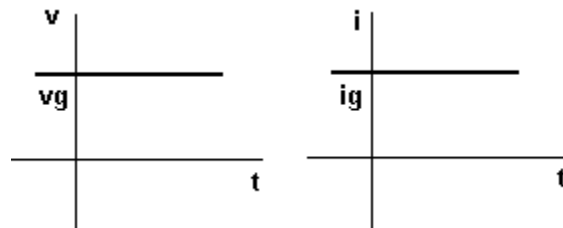


Figura 1.1

A lo largo de este texto trabajaremos con una corriente eléctrica que permanece constante con el paso del tiempo (ver fig. 1.1) y que la denominaremos **corriente directa o continua**. En un segundo texto, que servirá de continuación a éste, analizaremos circuitos en **corriente alterna**, que es una corriente eléctrica que varía sinusoidalmente con respecto al paso del tiempo (ver fig. 1.2).

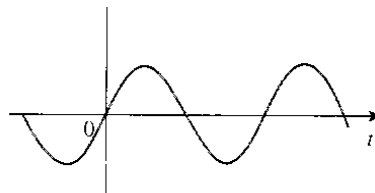


Figura 1.2

La teoría electromagnética nos dice que cualquier carga eléctrica crea un **campo eléctrico**, E ,

que es una magnitud vectorial y cuyo valor es

$$\mathbf{E} = kQ_1\mathbf{r}/r^2 \quad (1.3)$$

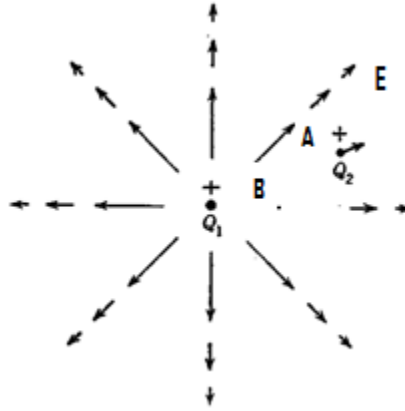


Figura 1.3

Donde k es una constante de proporcionalidad, Q_1 la carga que genera el campo eléctrico, \mathbf{r} un vector unitario que une la ubicación de la carga con el punto donde se quiere determinar el campo \mathbf{E} y r la distancia de separación de la carga al punto (ver figura 1.3). Consideremos el campo eléctrico creado por una carga Q_1 positiva (fig. 1.3), si quisiéramos llevar otra carga positiva unitaria (1 C), Q_2 , desde un punto A hasta un punto B, sería necesario aplicar una fuerza externa \mathbf{F} , opuesta a la fuerza de repulsión existente entre las cargas Q_1 y Q_2 (Ley de Coulomb). Esto implica la realización de un trabajo W (medido en joule (J)), para trasladar la carga Q_2 desde el punto A hasta el punto B. La magnitud del trabajo realizado sobre esta carga unitaria representa la diferencia de tensión o potencial existente entre los puntos A y B y que matemáticamente se expresa

$$V_{AB} = dW/dq \quad (1.4)$$

Esta diferencia de potencial se mide en volt (V), $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$.

Otra variable importante en los circuitos eléctricos es la **potencia**, que representa la tasa de variación del trabajo realizado con respecto al tiempo (t) y se mide en watt (W), $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$

$$p(t) = dW/dt \quad (1.5)$$

La potencia $p(t)$ se puede expresar en función de $V_{AB}(t)$ e $i(t)$

$$p(t) = (dW/dq)(dq/dt) = V_{AB}(t) i(t) \quad (1.6)$$

La anterior ecuación implica que $1 \text{ W} = 1 \text{ V A}$, si hablamos en términos de unidades.

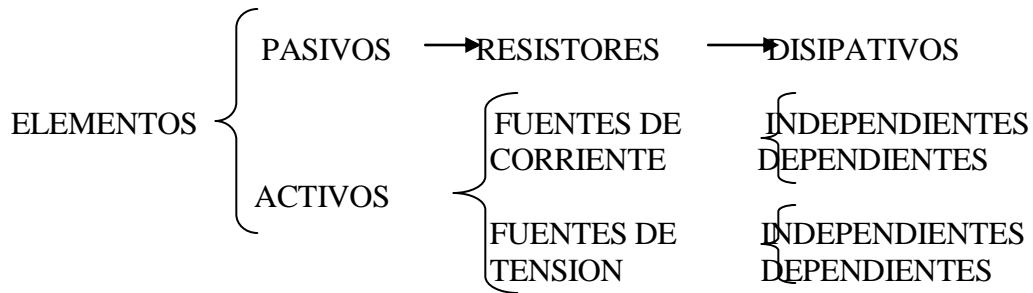
1.4 Elementos

Ahora analizaremos cada uno de los elementos con los cuales vamos a trabajar. Estos elementos se clasificarán en pasivos y activos según la tabla 1.5.

En una primera aproximación, podríamos decir que los elementos pasivos son aquellos que no pueden generar, por sí mismos, energía eléctrica; y elementos activos son aquellos capaces de generar energía eléctrica y entregarla a otros elementos. Estas son definiciones, que a pesar de

ser muy simplistas, nos ayudarán a comprender algunos principios circuitales.

Tabla 1.5



Para todos los elementos pasivos vamos a establecer una convención para los sentidos de la tensión y corriente eléctrica, que regirán las relaciones V vs I en cada uno de ellos. Esta convención la llamaremos:

CONVENCION # 1 : los sentidos de las variables son los establecidos en la figura 1.4, donde se puede ver que la corriente i , entra por el terminal A, el cual se considera que está a un potencial v volt mayor que el potencial del terminal B, de acuerdo a la polaridad de la tensión aplicada v . En otras palabras, la corriente i siempre entra por el terminal marcado $+$ en todo elemento pasivo.

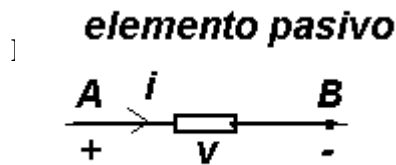


Figura 1.4

NUNCA OLVIDE LA FIG. 1.4 CUANDO ESTÉ TRABAJANDO CON ELEMENTOS PASIVOS.

1.4.1 RESISTORES

Un resistor es un elemento pasivo, disipativo, cuya relación tensión corriente está regida por la **LEY DE OHM**:

$$v = R * i \quad (1.7)$$

donde R es una constante de proporcionalidad que representa la propiedad que tiene el material de que está hecho el resistor para oponerse al flujo de corriente y se llama *resistencia eléctrica* y se mide en ohm (Ω).

La Fig.1.5 muestra el símbolo de un resistor; no olvide nunca que la tensión y la corriente deben satisfacer los sentidos establecidos para todo elemento pasivo.

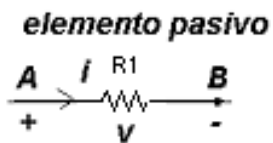


Figura 1.5

Si cambiáramos el sentido de la tensión o de la corriente, tendríamos que colocar un signo menos en la ecuación (1.7), para que se siguiera cumpliendo la relación v vs i (ver fig. 1.6). De acuerdo a la convención para elementos pasivos, en este caso se tiene:

$$v = -i * R$$

puesto que la corriente no entra por el terminal positivo, que hemos supuesto que está a un mayor potencial.

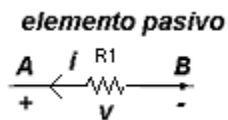


Figura 1.6

En la fig.1.7 se muestran las características tensión corriente para un resistor.

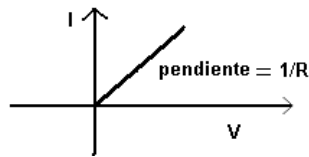


Figura 1.7

En la definición, establecimos que el resistor es un elemento disipativo; para aclarar este punto consideremos la fig. 1.8, donde se ha conectado una batería a un cierto elemento resistivo, al hacer esto se establece un campo eléctrico dentro del material resistivo, el cual hace que los electrones libres dentro de él, se desplacen, pero durante su movimiento sufrirán continuos choques con otras partículas y generarán calor, es decir, está convirtiendo la energía eléctrica, entregada por la fuente, en calor que **disipa** la propia resistencia.

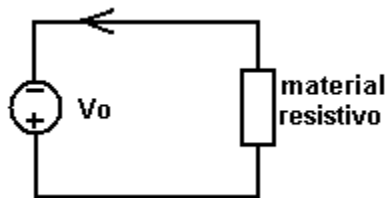


Figura 1.8

La ecuación (1.7), también se puede escribir así:

$$i = 1/R * v = G * v \quad (1.8)$$

donde

$$G = 1/R$$

es la **conductancia** y su unidad es el **siemens (S)**.

Para determinar la **energía eléctrica disipada por un resistor** en un intervalo de tiempo δt debemos partir de la **potencia instantánea $p(t)$**

$$p(t) = v(t) * i(t) \quad (1.9)$$

y como

$$v(t) = R * i(t) \quad (1.10)$$

podemos también escribir que:

$$p(t) = v^2/R = i^2 * R \quad (1.11)$$

Y volviendo a la ecuación de la energía tenemos que:

$$W = \int_0^{\delta t} p \, dt \quad (1.12)$$

es la energía disipada por el resistor en un intervalo de tiempo δt .

Antes de abandonar el tema de los resistores es importante presentar los conceptos de

cortocircuito y circuito abierto:

El cortocircuito lo podemos asociar con una resistencia de valor cero, tal como se muestra en la fig.1.9.

El **circuito abierto** se puede asociar con una resistencia infinita, tal como se muestra en la Fig. 1.10.

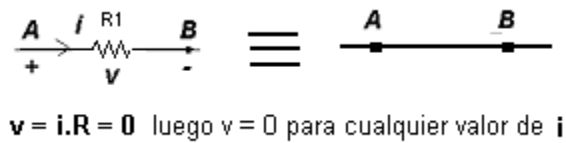


Figura 1.9

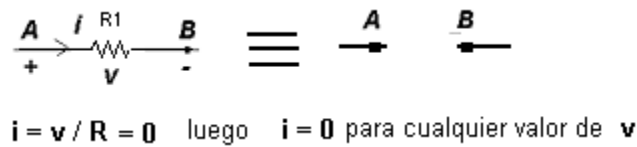


Figura 1.10

1.4.2 FUENTES IDEALES

Fuente ideal de tensión: Es un elemento activo que se caracteriza por tener entre sus terminales una tensión o voltaje que es independiente de la corriente que pasa por él.

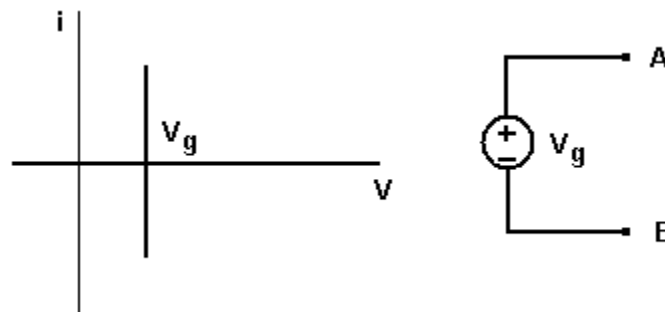


Figura 1.11

De las figuras podemos apreciar que la tensión entre los terminales A y B de la fuente es v_g volt, sin importar el valor de la corriente que circule por ella, esto quiere decir que podemos conectar cualquier circuito a los terminales A y B y la tensión que aparece entre estos terminales será siempre la misma, v_g .

La tensión v_g puede ser función del tiempo, esto implica que el valor v_g de la gráfica sea diferente para diferentes instantes de tiempo. En esta primera parte solo trabajaremos con

corriente continua, lo cual implica que v_g es constante con el tiempo. Los signos mostrados indican que V_A es v_g volt mayor que V_B si $v_g > 0$, para aclarar este punto veamos las figuras siguientes:

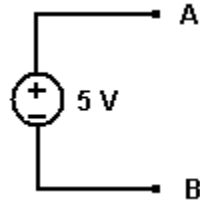


Figura 1.12

El terminal A es 5 V positivo con respecto al terminal B.

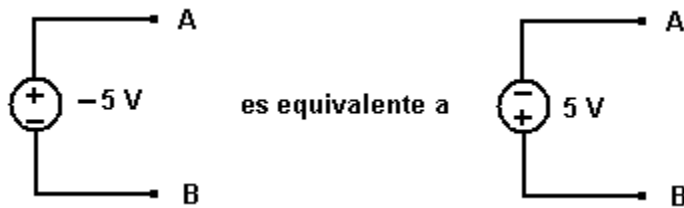


Figura 1.13

El terminal A es 5V negativo con respecto al terminal B.

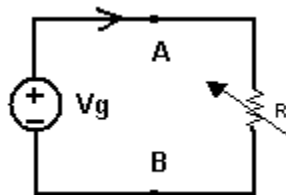


Figura 1.14

Decimos que la fuente es ideal, por estar en capacidad de suministrar una potencia infinita, lo cual es **imposible** de lograr con una fuente **real**. Consideremos que se le aplica, como carga, una resistencia variable a la fuente v_g . La tensión aplicada a R, sin importar cual sea su valor, será v_g .

De acuerdo a la ley de Ohm

$$i = v_g / R \quad (1.13)$$

A medida que R disminuye, i se hace cada vez más grande y por lo tanto la potencia en la fuente

$$p = v_g * i \quad (1.14)$$

aumenta, hasta llegar a infinito si permitimos que $R \rightarrow 0$, en este caso la tensión en el resistor será

$$v_g = i * R = \infty * 0 \quad (1.15)$$

Estos resultados son aceptables, sólo desde un punto de vista teórico, pues nunca conseguiremos una fuente capaz de suministrar una potencia infinita. Por el momento trabajaremos con fuentes ideales, posteriormente introduciremos un modelo de fuente que se acerque más a la realidad.

Fuente ideal de Corriente: es un elemento activo que se caracteriza por inyectar en el sentido indicado por la flecha (ver símbolo) una corriente i_g , la cual es independiente de la tensión que hay entre sus terminales.

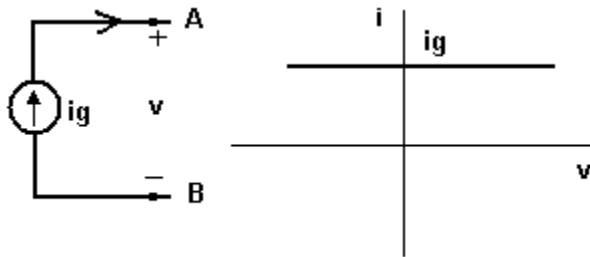


Figura 1.15

Se puede apreciar que la corriente inyectada al terminal A es i_g , independiente de la tensión que haya entre los terminales A y B.

Esta fuente se dice que es ideal, porque es capaz de suministrar una potencia infinita, la cual no se puede obtener con una fuente real.

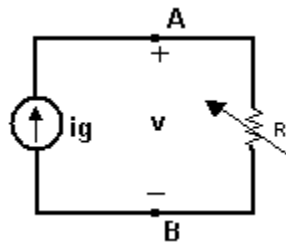


Figura 1.16

Cualquiera que sea el valor de R , la corriente inyectada al terminal A es i_g y $v = i_g * R$. Luego, al aumentar R , v aumenta y si $R \rightarrow \infty$ y $v \rightarrow \infty$, entonces

$$p = v * i_g \rightarrow \infty \quad (1.16)$$

1.4.3 Fuentes Controladas o Dependientes

Son elementos activos. Su comportamiento es igual al de las fuentes ideales de tensión o corriente, sólo se diferencian de ellas por el hecho de ser fuentes dependientes o controladas, lo cual quiere decir que su valor depende de una tensión o una corriente en alguna parte del circuito. Hay dos tipos de fuentes controladas de tensión:

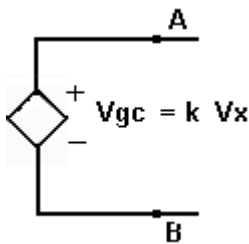


Figura 1.17

- a) **Fuente de tensión controlada por tensión.** La constante k es adimensional, v_x es la tensión en algún otro elemento del circuito.

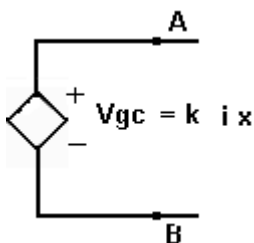


Figura 1.18

- b) **Fuente de tensión controlada por corriente.** k tiene unidades de resistencia (ohm), i_x es la corriente en alguna parte del circuito, la cual controla al valor de la fuente.

También hay dos tipos de fuentes controladas de corriente:

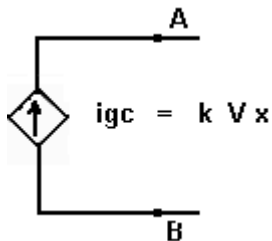


Figura 1.19

a) *Fuente de corriente controlada por tensión.* K tiene unidades de conductancia (siemens), v_x es la tensión de control.

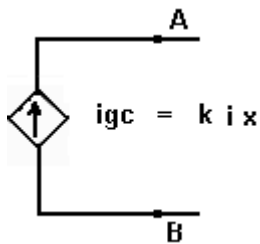


Figura 1.20

b) *Fuente de corriente controlada por corriente.* K es adimensional, i_x es la corriente de control.

Las fuentes controladas se utilizan para obtener el modelo de un gran número de dispositivos electrónicos como: válvulas de vacío, transistores, **FET**, amplificadores operacionales, etc. En la fig 1.21 se muestran el modelo de un un transistor.

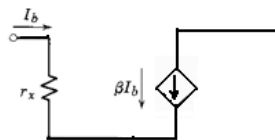


Figura 1.21

Las fuentes de tensión y corriente, a pesar de ser elementos activos, se pueden comportar como elementos pasivos, lo cual quiere decir que en lugar de entregar energía la absorben (consumen), igual que un resistor.

Diremos que una fuente entrega energía si la corriente i sale del terminal positivo de la fuente, con $v_g > 0$ e $i > 0$. Por ejemplo, en la fig. 1.22 , $v_g = 5 \text{ V}$ e $i = 1 \text{ A}$, la fuente de tensión entrega una potencia de 5 W , puesto que la corriente sale del terminal positivo. Si la tensión o la corriente cambiaran de sentido la fuente recibiría 5 W y se comportaría como un elemento pasivo.

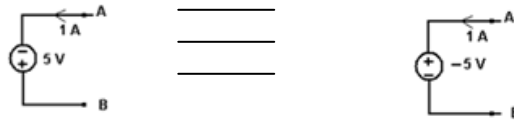


Figura 1.22

Para fuentes de corriente tenemos:

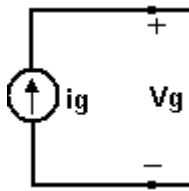


Figura 1.23

Si i_g sale del terminal cuya polaridad es + y v_g e i_g son positivos, la fuente entregará potencia, en caso contrario recibirá potencia, comportándose así como un elemento pasivo.

Para concluir este tema establezcamos el principio de conservación de la energía en los términos siguientes:

$$\text{Potencia entregada} = \text{Potencia recibida}$$

Este principio se tiene que cumplir en toda red eléctrica.

1.5 Redes Eléctricas.

La interconexión de varios elementos forma una *red eléctrica*. Diremos que dicha red es **activa**, si tiene por lo menos una fuente independiente de tensión o de corriente.

En esta parte nos dedicaremos al análisis, que es el proceso mediante el cual se determinan la corriente, tensión o potencia eléctrica en un elemento de una red eléctrica. En el comienzo restringiremos nuestro análisis a las redes excitadas con fuentes de corriente continua, esto es, consideraremos sólo fuentes cuyo valor v_g o i_g no varían en el tiempo (fig.1.24).

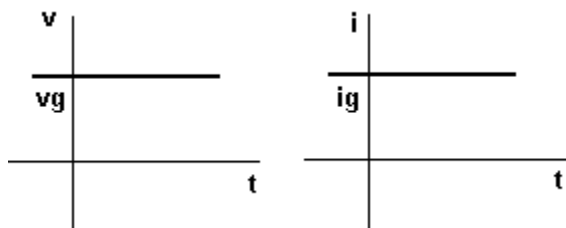


Figura 1.24

Como ya conocemos algunos de los elementos con los cuales vamos a trabajar, necesitamos ahora introducir las Leyes de Kirchhoff, las cuales nos permitirán iniciar el análisis de las redes eléctricas.

1.6 Leyes de Kirchhoff:

Antes de enunciar estas leyes debemos dar algunas definiciones importantes:

Nudo: es un punto de la red donde se unen dos o más elementos de la red; ejemplos H y C de la fig.1.25. Cuando varios puntos de una red se unen mediante cables ideales de resistencia cero (cortocircuito), todos los puntos, así unidos, forman un solo nudo, (así A y B forman un solo nudo; al igual que los puntos G, F, E y D).

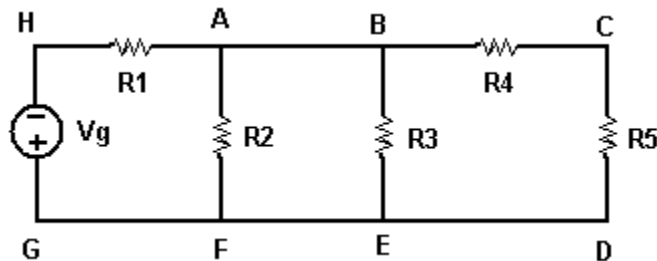


Figura 1.25

Rama: Vamos a asociar una rama con un elemento cualquiera del circuito tal como un resistor o una fuente de tensión.

Malla: Es un conjunto de ramas de la red que forman una trayectoria cerrada, ejemplo las mallas HAFGH, ABEFA, BCDEB, HABCDEFGH, entre otras.

Una vez conocidas estas definiciones podemos enunciar las leyes de Kirchhoff:

1.6.1 Ley de Corrientes de Kirchhoff: La suma algebraica de las corrientes instantáneas en un nudo cualquiera de la red es cero.

$$\sum i = 0 \text{ en un nudo cualquiera.} \tag{1.17}$$

Consideremos que A es un nudo de una red cualquiera (ver fig. 1.26), como vemos en este nudo hay ciertas corrientes que entran al nudo (i_3) y otras que salen (i_1, i_2, i_4 e i_5).

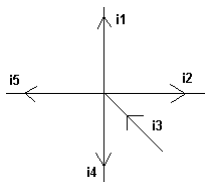


Figura 1.26

Para aplicar correctamente la ley de corrientes de Kirchhoff, tenemos que distinguir las corrientes que entran y las que salen, asignándoles signos diferentes; aquí vamos a establecer la siguiente convención que Ud. debe tratar de seguir para evitar confusiones con los signos, cuando analice redes complejas:

Convención 2: Asignaremos signos positivos a todas aquellas corrientes que salen del nudo: (i_1, i_2, i_4 e i_5 en el ejemplo) y signos negativos a las corrientes que entran al nudo (i_3 en el ejemplo). Al aplicar los conceptos y convenciones anteriores al nudo A tendremos:

$$\sum i = 0 \text{ nudo A} \tag{1.18}$$

$$i_1 + i_2 - i_3 + i_4 + i_5 = 0 \tag{1.19}$$

La ley de corrientes de Kirchhoff establece, en otras palabras, que la carga eléctrica no se puede acumular en un nudo de la red, esto es la cantidad de carga que entra a un nudo cualquiera en un cierto instante, es igual a la cantidad de carga que sale de ese nudo.

1.6.2 Ley de Tensiones de Kirchhoff: La suma algebraica de las tensiones instantáneas en cualquier malla de la red es cero.

$$\sum v = 0 \text{ en cualquier malla de la red} \quad (1.20)$$

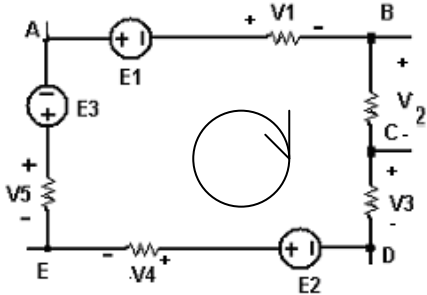


Figura 1.27

Consideremos la malla ABCDEA de una cierta red, como vemos, cada una de las ramas de la red tienen una tensión con su respectiva polaridad. Recordemos que la polaridad en los elementos pasivos siempre va a seguir la **convención 1**. La polaridad en las fuentes no dependen de convenciones sino de la forma en que se hagan las conexiones del circuito.

Para aplicar correctamente la ley de tensiones de Kirchhoff, se recomienda asumir primero un sentido de recorrer la malla, aquí recomendamos recorrer siempre las mallas en el sentido de las agujas del reloj, esto nos ayudará en la sistematización del análisis de redes por el método de mallas, que estudiaremos posteriormente. Una vez hecho esto, asignaremos signos positivos a todas las tensiones de aquellas ramas donde se entre por el terminal positivo en el recorrido de la malla, y asignaremos signos negativos cuando se entre por el terminal negativo de la rama.

La flecha de la figura asigna el sentido recomendado para el recorrido de la malla, esto es, vamos a recorrer la malla empezando en A, hacia B C... y así sucesivamente, luego tenemos:

$$\sum v = 0 \text{ en la malla A B C D E A} \quad (1.21)$$

$$+ E_1 + v_1 + v_2 + v_3 - E_2 + v_4 - v_5 + E_3 = 0 \quad (1.22)$$

Aquí vemos que en E_1 , v_1 , v_2 , v_3 , v_4 y E_3 , las ramas han sido recorridas entrando por el terminal positivo, y en E_2 y v_5 se ha entrado por el terminal negativo.

Analicemos ahora algunos circuitos sencillos, cuyo entendimiento permitirá comprender la aplicación de los conceptos vistos a redes más complejas.

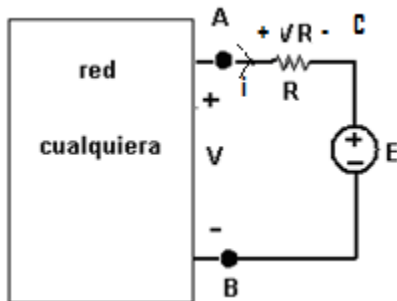


Figura 1.28

La tensión en R se obtiene al aplicar la ley de Ohm

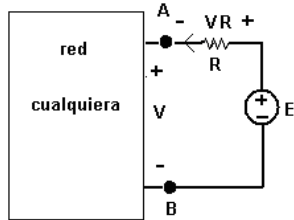
$$v_R = i \cdot R \quad (1.23)$$

Entre A y B hay una red cualquiera, pero en el análisis siguiente podemos considerar que entre A y B hay una rama de la malla con una tensión v y de la cual sale una corriente i , luego podemos aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff en la Malla ACBA y tendremos :

$$- v + i \cdot R + E = 0 \quad \therefore \quad v = E + i \cdot R \quad (1.24)$$

A esta ecuación la llamaremos ecuación de rama. Recuerde que la polaridad en la resistencia R , queda automáticamente establecida al asignar un sentido a la corriente.

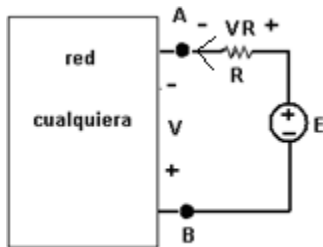
Veamos otros tres casos posibles cuando cambiamos el sentido de la corriente y la polaridad de v .



$$-v - i \cdot R + E = 0$$

$$v = E - R \cdot i \quad (1.25)$$

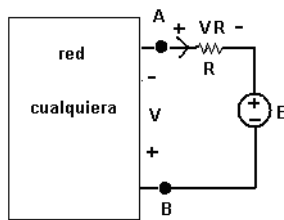
Figura 1.29



$$v - R \cdot i + E = 0$$

$$v = -E + R \cdot i \quad (1.26)$$

Figura 1.30



$$v + i \cdot R + E = 0$$

$$v = -E - i \cdot R \quad (1.27)$$

Figura 1.31

Como puede ver, si sigue cuidadosamente los conceptos y convenciones establecidas, las posibilidades de errores serán mínimas.

Veamos otros ejemplos donde aplicamos la ley de corrientes de Kirchhoff.

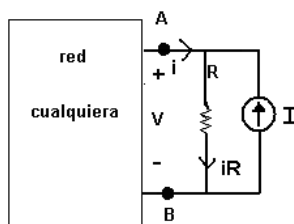


Figura 1.32

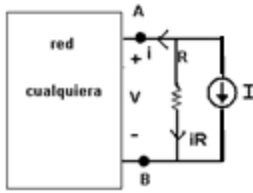
De acuerdo a la polaridad de la tensión V , que es la misma tensión que aparece en los extremos de la resistencia R y de la fuente de corriente, se tiene que la corriente en R debe fluir hacia abajo (obviamente, si el valor de V es positivo).

Si planteamos la ley de corrientes de Kirchhoff en el nudo x tenemos:

$$-i + i_R - I_g = 0 \quad \therefore \quad i = -I_g + v/R \quad (1.28)$$

donde $i_R = v/R$ de acuerdo a la ley de Ohm. Recuerde también la convención de los signos de las corrientes.

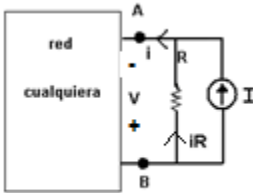
Otros tres casos posibles pueden ser:



$$i + i_R + I_g = 0$$

$$i = -I_g - v/R \quad (1.29)$$

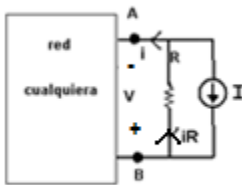
Figura 1.33



$$i - i_R - I_g = 0$$

$$i = I_g + v/R \quad (1.30)$$

Figura 1.34

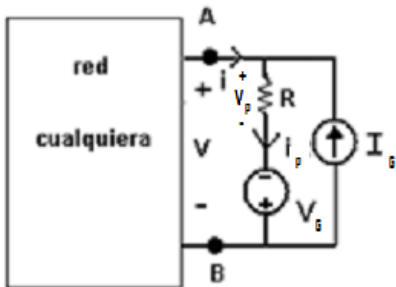


$$i - i_R + I_g = 0$$

$$i = -I_g + v/R \quad (1.31)$$

Figura 1.35

Todos los ejemplos anteriores se pueden resumir analizando el circuito mostrado en la fig. 1.36.



$$v = v_p - V_g$$

$$= R \cdot i_p - V_g$$

donde $i_p = i + I_g$

luego $v = R \cdot i + R \cdot I_g - V_g \quad (1.32)$

o despejando el valor de la corriente:

$$i = v/R - I_g + V_g/R \quad (1.33)$$

Figura 1.36

Sigamos ahora aplicando los conceptos vistos a otros circuitos sencillos, tales como el que se muestra en la fig.1.37.

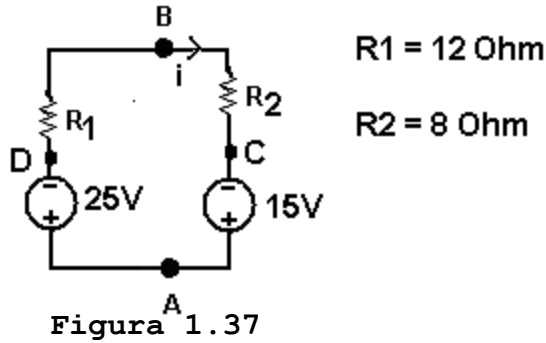


Figura 1.37

Supongamos que nos piden analizar el circuito de la fig.1.37; en él podemos encontrar corrientes, tensiones y potencias entregadas o disipadas por cada uno de los elementos. Si miramos la red vemos que tiene una sola malla y que por todos sus elementos va a circular exactamente la misma corriente, luego si consideramos como incógnitas las corrientes, tendríamos que plantear una sola ecuación que nos permitiría calcular la corriente i que circula en la malla; y una vez conocida esta podemos hallar todas las otras posibles variables del circuito tales como tensiones y potencias en cada uno de los elementos. En cambio si consideramos como incógnitas las tensiones tendríamos que plantear por lo menos 2 ecuaciones que nos permitiera hallar las tensiones desconocidas en las resistencias de 12 y 8 Ω respectivamente.

Dadas las características del circuito vamos asumir como incógnita la corriente i , a la cual le asignaremos un sentido cualquiera (en la fig.1.37 se le asignó el sentido de las manecillas del reloj). El siguiente paso consiste en acudir a la leyes de Kirchhoff, para plantear la ecuación que nos permita hallar el valor de i . Por la naturaleza misma del problema, vemos que no tiene sentido aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff al circuito, pues el aplicarla nos daría una identidad, veamos:

$$\sum i = 0 \text{ en A} \quad (1.34)$$

$$-i + i = 0 \quad \therefore i = i?$$

Lo lógico, en este caso, es aplicar la ley de tensiones Kirchhoff:

$$\sum v = 0 \text{ en malla A B C D A} \quad (1.35)$$

Para aplicar correctamente esta ley recordemos la **convención 1** para elementos pasivos, la cual nos dice que al asignar un sentido a la corriente i , automáticamente estamos asignando una polaridad a las tensiones en los elementos pasivos (en este caso, en las resistencias), luego podremos redibujar el circuito tal como se muestra en la fig.1.38.

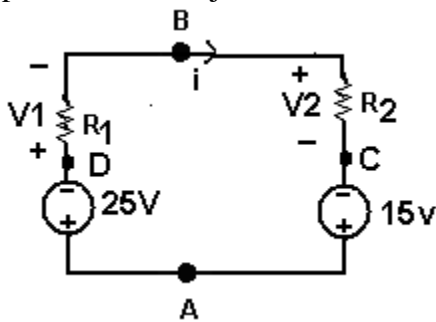


Figura 1.38

$$R1 = 12 \text{ Ohm}$$

$$R2 = 8 \text{ Ohm}$$

Sabemos, que de acuerdo a la ley de Ohm,

$$v_1 = i * 12 \text{ y}$$

$$v_2 = i * 8.$$

En ambas relaciones el signo es positivo, puesto que se ha mantenido la **convención 1**.

Ahora si podemos aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff:

$$+ 12i + 8i - 15 + 25 = 0 \quad \therefore \quad 20i = -10 \quad (1.36)$$

$$i = -0.5 \text{ A}$$

El signo negativo del resultado implica que el sentido físico verdadero de la corriente es el opuesto al asumido. Con el valor de i conocido, podemos hallar los valores de las tensiones y potencias en cada rama del circuito así:

$$v_1 = i R_1 = 12 i = 12 * (-0.5) = -6 \text{ V}$$

$$v_2 = i R_2 = 8 i = 8 * (-0.5) = -4 \text{ V}$$

Con respecto a los cálculos de potencia tenemos:

$$P_{12} = i^2 R_1 = (0.5)^2 * 12 = 3 \text{ W (disipados por } R_1)$$

$$P_8 = i^2 R_2 = (0.5)^2 * 8 = 2 \text{ W (disipados por } R_2)$$

Recuerde que las resistencias siempre disipan potencia.

Para saber si las fuentes entregan o reciben potencia, debemos analizar el sentido físico verdadero de las corrientes y tensiones, luego tenemos:

$$P_{25V} = 25 * 0.5 = 12.5 \text{ W}$$

Como la corriente (con sentido físico verdadero) sale del terminal positivo de la fuente de tensión concluimos que dicha fuente entrega energía al circuito.

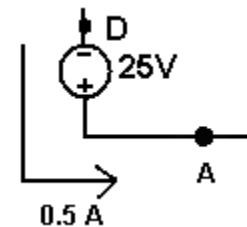


Figura 1.39

En la otra fuente de tensión, tenemos:

$$P_{15V} = 15 * 0.5 = 7.5 \text{ W}$$

Como la corriente **entra** por el terminal positivo (o sale del terminal negativo) de la fuente de tensión, tenemos que dicha fuente **se comporta como un elemento pasivo** que consume potencia a razón de 7.5 W. Se cumple el balance energético:

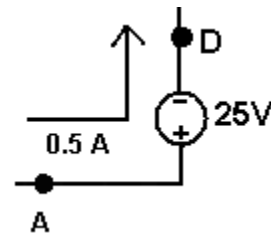


Figura 1.40

$$P_{entregada} = P_{recibida}$$

$$12.5 = 3 + 2 + 7.5$$

Aquí podemos hacer un comentario interesante: la fuente de 15 V puede remplazarse por un resistor, entre cuyos extremos hay una tensión de 15 V y por el cual circula una corriente 0.5 A; esto es:

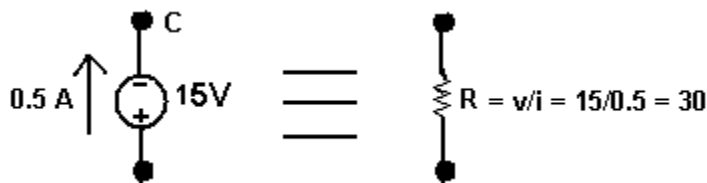


Figura 1.41

Luego el circuito original, puede ser reemplazado por el circuito **equivalente** de la fig.1.42. Al decir que los circuitos son equivalentes estamos afirmando que las tensiones, corrientes potencias en ambos circuitos son iguales en cada una de las ramas análogas.

Analice Ud. el circuito de la figura y compruebe lo que hemos dicho anteriormente .

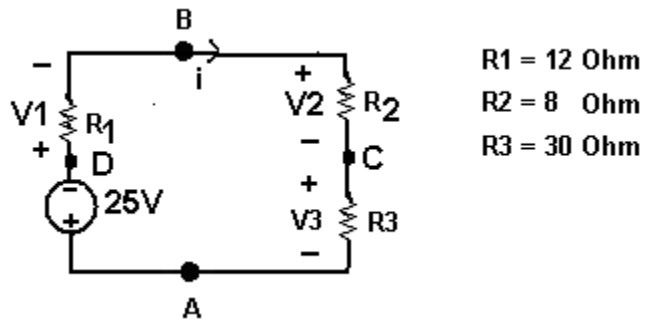


Figura 1.42

Resumiendo el método aplicado en el análisis del circuito de la fig.1.38, tenemos:

1. Elegimos como incógnita la corriente i , a la cual le asignamos un sentido arbitrario.
2. Aplicamos la ley de tensiones de Kirchhoff, para plantear la ecuación necesaria que nos permitió hallar el valor de i .

Aquí podemos adelantar alguna observación sobre lo que veremos posteriormente en el método de mallas y es lo siguiente: cuando se usen como incógnitas las corrientes, en el análisis de un circuito, se va a utilizar la ley de tensiones de Kirchhoff para el planteo de las ecuaciones necesarias.

1.7 Interconexión de elementos en serie.

Del análisis del circuito de la fig. 1.38, también podemos extraer algunas definiciones sobre interconexión de elementos en **serie**.

Decimos que varios elementos están interconectados en **serie** cuando por todos ellos circula la misma corriente y además la tensión total es igual a la suma algebraica de las tensiones en cada uno de los elementos.

1.7.1 Interconexión de resistencias en serie

Como vemos en el circuito de la fig.1.43, por cada una de las n resistencias circula la misma corriente i (recuerde que el sentido de esta corriente fija automáticamente las polaridades en los elementos pasivos).

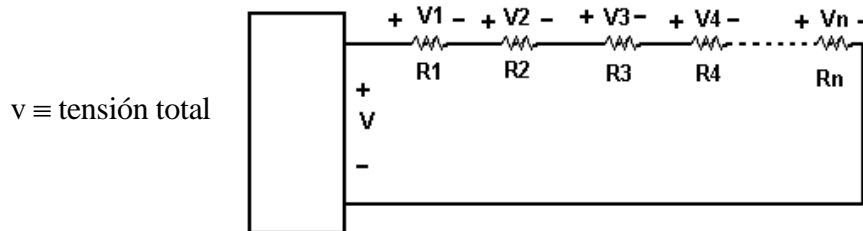


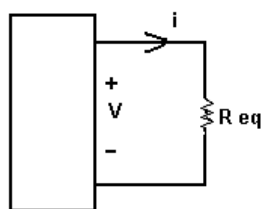
Figura 1.43

Si calculamos la tensión total tenemos:

$$v = \sum_1^n v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= iR_1 + iR_2 + \dots + iR_n = i \sum_{k=1}^n R_k$$

Un circuito equivalente sería el mostrado en la fig.1.44.



$$v = i R_{eq} = i \sum_{k=1}^n R_k \therefore R_{eq} = \sum_{k=1}^n R_k \quad (1.36)$$

Figura 1.44

Luego concluimos que un conjunto de n resistencias en serie se pueden reemplazar por una resistencia equivalente (R_{eq}) que es igual a la suma de las n resistencias. En algunas ocasiones nos encontraremos que una de las resistencias interconectadas en serie es un circuito abierto, esto es $R = \infty$, lo cual hace que la corriente sea nula y la resistencia total en serie será $R_{eq} = \infty$, tal como se ilustra en la fig.1.45.

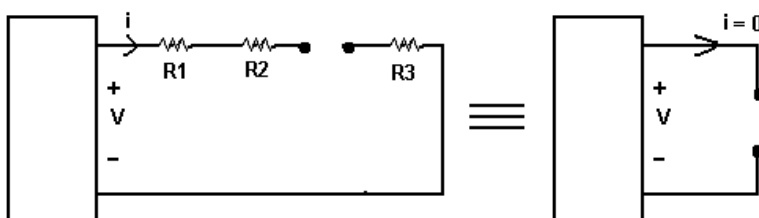


Figura 1.45

1.7.2 Interconexión de fuentes ideales de tensión en serie.

En el circuito mostrado en la fig.1.46 también fluye la misma corriente por todos los elementos y se tiene, al aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff, que:

$$\begin{aligned} -v + E_1 + E_2 + E_3 &= 0 \\ \therefore v &= E_1 + E_2 + E_3 = \sum_{k=1}^n E_k \end{aligned} \quad (1.37)$$

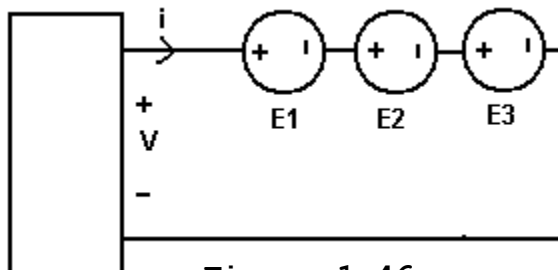


Figura 1.46

luego es posible reemplazar las fuentes de tensión por una fuente equivalente de valor $v = \sum_{k=1}^n E_k$ y que tiene la misma polaridad que v , tal como se muestra en la figura 1.47.

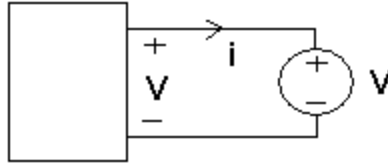


Figura 1.47

1.7.3 Interconexión de fuentes ideales de corriente en serie.

Varias fuentes ideales de corriente *sólo se pueden conectar en serie* si el valor de I_g es el mismo en todas ellas.

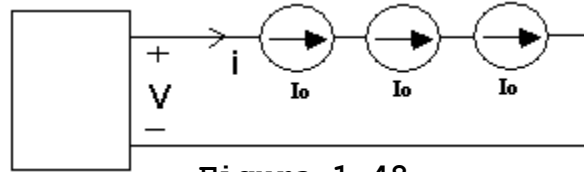


Figura 1.48

Si las fuentes ideales tienen diferentes valores de corriente es un contrasentido interconectarlas en serie, esto es, Ud. no puede interconectar en serie las fuentes de la figura 1.49.

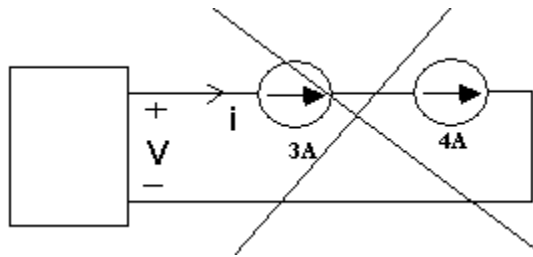


Figura 1.49

Esta conexión es imposible puesto que i tiene que ser la misma en todos los elementos y resulta que en una fuente $i = 3 \text{ A}$ y en la otra $i = 4 \text{ A}$.

Analicemos otro circuito sencillo en el cual aparezcan fuentes controladas como en la fig.1.50.

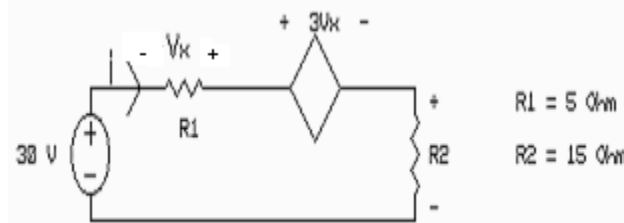


Figura 1.50

Aquí vemos que existe una fuente de tensión controlada por la tensión v_x , *cuya polaridad es un dato del problema*. Al asumir como incógnita la corriente (circuito con una sola malla, donde circula la misma corriente i en todos los elementos) hay una aparente contradicción en la polaridad de la tensión en la resistencia R_1 , puesto que hemos dicho que al asumir el sentido de corriente quedan fijadas automáticamente las polaridades en los elementos pasivos; luego en la resistencia de 5Ω , de acuerdo a la convención 1, y después de aplicar la ley de Ohm se tiene:

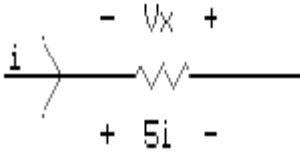


Figura 1.51

pero v_x , *es un dato del problema* y no podemos cambiar su polaridad, luego la relación de tensión y corriente en esta resistencia quedará:

$$v_x = -5 \times i \quad (1.38)$$

La tensión v_x hubiera sido positiva si cumpliera con la convención 1.

Ahora apliquemos la ley de tensiones de Kirchhoff al circuito de la fig 1.50:

$$-v_x + 3v_x + 15i - 30 = 0 \quad (1.39)$$

$$30 = 2v_x + 15i$$

Aparece una incógnita adicional v_x , debido a la fuente controlada, pero aplicando la ecuación (1.38), tenemos.

$$30 = + 2(-5i) + 15i = 5i$$

$$\therefore i = 6 \text{ A}$$

y

$$v_x = -5 * 6 = -30 \text{ V}$$

$$v_{15\Omega} = 15 * i = 90 \text{ V}$$

$$3v_x = 3 (-30) = -90 \text{ V}$$

$$P_{5\Omega} = 6^2 * 5 = 180 \text{ W (potencia disipada)}$$

$$P_{15\Omega} = 6^2 * 15 = 540 \text{ W (potencia disipada)}$$



Figura 1.52

$$P_{30V} = 30 * 6 = 180W \text{ (potencia entregada al circuito)}$$

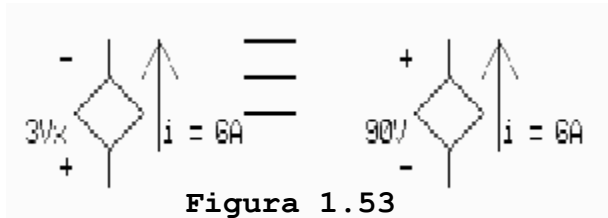


Figura 1.53

En la fig.1.53 se muestra la verdadera polaridad de v y el verdadero sentido de i . Luego $P_{3vx} = 90 \times 6 = 540 \text{ W}$ (potencia entregada al circuito, puesto que la corriente sale del terminal positivo de la fuente).

Balance de Potencias

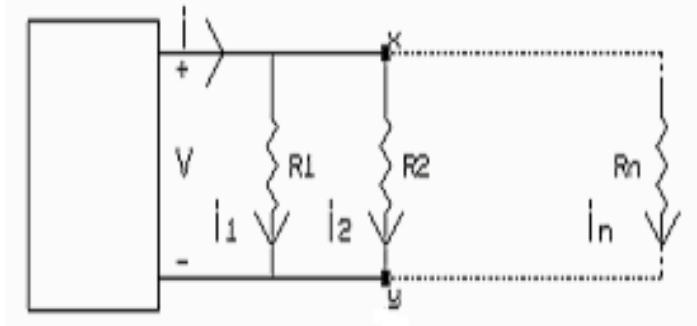
$$540 + 180 = 540 + 180$$

entregadas por las fuentes consumidas por las resistencias

1.8 Interconexión de elementos en paralelo.

Decimos que varios elementos están interconectados en **paralelo**, cuando todos ellos están sometidos a la misma tensión y además la corriente total es igual a la suma algebraica de las corrientes en cada uno de los elementos.

1.8.1 Interconexión de resistencias en paralelo.



Como se aprecia en el circuito de la figura 1.54, todas las resistencias están sometidas a la misma tensión v (las corrientes $i_1, i_2 \dots i_n$, concuerdan con la convención 1) y además:

Figura 1.54

$$i = \sum_{k=1}^n i_k = i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n$$

$$= \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \dots + \frac{v}{R_n}$$
 Como $g_k = \frac{1}{R_k}$ tenemos:

$$i = v \cdot g_1 + v \cdot g_2 + \dots + v \cdot g_n$$

$$= v(g_1 + g_2 + \dots + g_n) = v \sum_{k=1}^n g_k$$
 o también $i = v \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = v \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$
 Un circuito equivalente sería el siguiente:

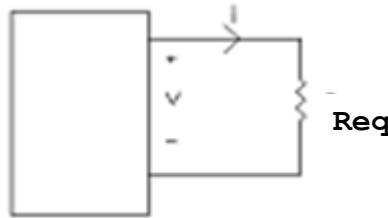


Figura 1.55

Donde
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \tag{1.39}$$

La última ecuación también se puede escribir en términos de conductancias:

$$g_{eq} = \sum_{k=1}^n g_k \tag{1.40}$$

luego concluimos que un conjunto de n conductancias interconectadas en paralelo se pueden remplazar por una conductancia equivalente g_{eq} de valor igual a la suma de las n conductancias.

Cuando hay sólo dos resistencias interconectadas en paralelo, se acostumbra utilizar la expresión (1.41), esto es:

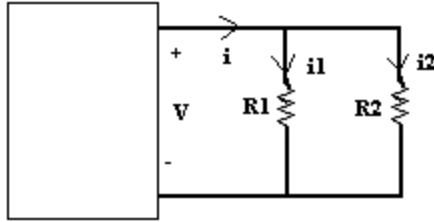


Figura 1.56

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \quad \therefore \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.41)$$

La expresión (1.41) nos dice que dos resistencias en paralelo se pueden reemplazar por una R_{eq} cuyo valor es igual al producto de R_1 y R_2 sobre la suma de las mismas. En algunas ocasiones encontraremos que una de las resistencias interconectadas en paralelo es un cortocircuito, esto es $R = 0$, o $g = \infty$, por lo tanto la

$$g_{eq} = \infty \text{ o } R_{eq} = 0$$

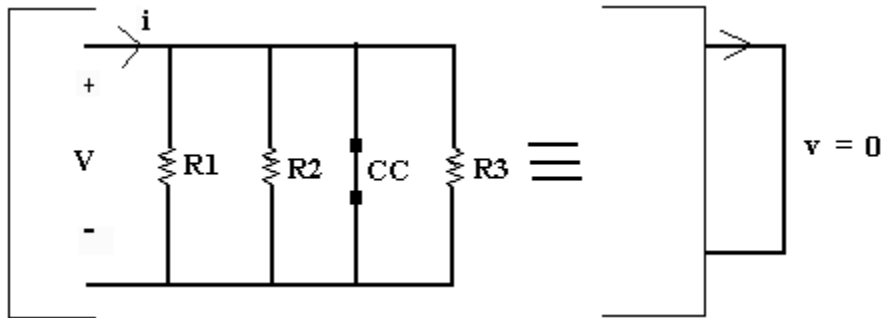


Figura 1.57

1.8.2 Interconexión de fuentes ideales de corriente en paralelo

En la la fig. 1.58 tenemos 4 fuentes ideales de corriente interconectadas en paralelo; si aplicamos la ley de corrientes de Kirchoff, tenemos:

$$-i + i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = \therefore i = \sum i_n \text{ (sumatoria algebraica)}$$

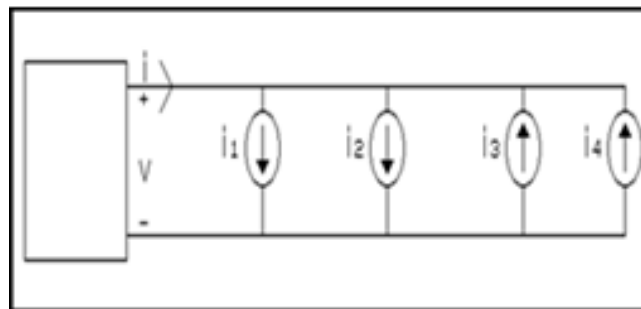


Figura 1.58

Lo cual nos dice que las cuatro fuentes ideales de corriente interconectadas en paralelo,

se puede reemplazar por una fuente ideal con el mismo sentido de i y de valor igual a la suma algebraica de las fuentes de corriente presentes.

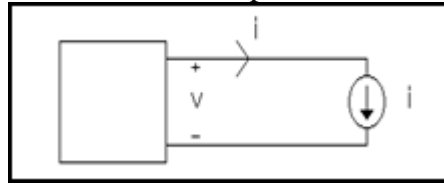


Figura 1.59

$$i = \sum i_k \quad (1.42)$$

Varias fuentes ideales de tensión sólo se pueden interconectar en paralelo si tienen la misma polaridad y el mismo valor, tal como se muestra en la fig.1.60.

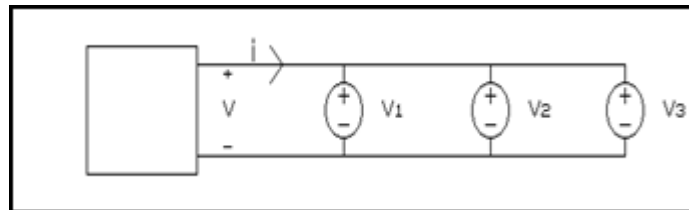


Figura 1.60

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

Si las fuentes ideales de tensión tienen diferentes valores de tensión, es un contrasentido interconectarlas en paralelo, tal como se muestra en la fig. 1.61.

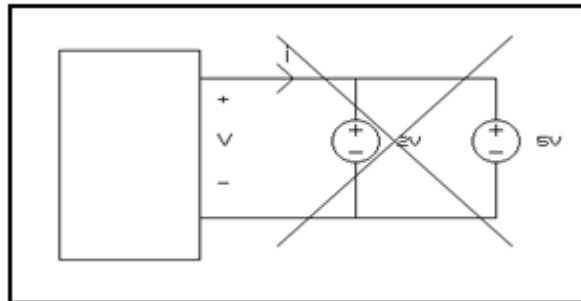


Figura 1.61

Decimos que es un contrasentido, puesto que debido a los conceptos hasta aquí expuestos, nos diría que $v = 2 \text{ V}$ y también que $v = 5 \text{ V}$, lo cual es imposible.

Veamos ahora una serie de ejemplos sencillos que ilustren la interconexión de elementos en paralelo y la aplicación de la ley de corrientes de Kirchhoff.

Analicemos el circuito que se muestra en la fig.1.62. Es una red compuesta por dos fuentes ideales de corriente y dos conductancias. En ella podemos distinguir los nudos x e y y cuatro ramas.

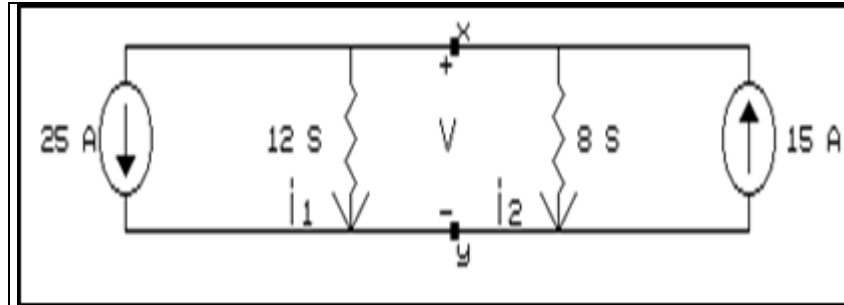


Figura1.62

Analizando la red podemos determinar que las cuatro ramas existentes, tienen la misma tensión v (los sentidos de i_1 e i_2 concuerdan con la convención 1), razón por la cual vemos la conveniencia de elegir, en este caso, como incógnita la tensión v ; para hallar su valor solamente necesitaremos el planteo de una ecuación. Si quisiéramos utilizar como incógnitas las corrientes i_1 e i_2 necesitaríamos plantear un número mayor de ecuaciones, como es lógico. Esto implica que en el análisis de circuitos eléctricos es necesario conocer los diferentes métodos, puesto que siempre habrá algunos métodos que nos permitirán llegar a la solución de los problemas en forma más expedita.

Una vez elegida la tensión v como incógnita, vamos a utilizar la ley de corrientes de Kirchoff para plantear la ecuación:

$$\begin{aligned} \sum i &= 0 \text{ en nudo } x \\ 25 + 12 \cdot v + 8 \cdot v - 15 &= 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

A esta ecuación la llamaremos ecuación de nudo.

Recordemos que la convención de corrientes que establecimos dice: "las corrientes que salen del nudo x son positivas y las que entran serán negativas", por esta razón la fuente de 25 A es positiva al entrar su valor en la ecuación (1.43) y la fuente de 15 A se entra como un valor negativo. Para hallar los valores de las corrientes en las conductancias hemos aplicado la ley de Ohm.

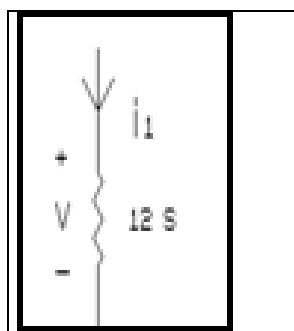


Figura1.63

$$\begin{aligned} v &= i \cdot R \\ \text{o } i &= v/R = v \cdot G \\ \text{luego } i_1 &= 12 \cdot v \end{aligned}$$

Volviendo a la ecuación (1.43) podemos determinar el valor de v

$$\begin{aligned} 20 \cdot v &= -10 \\ \therefore v &= -0.5 \text{ V} \end{aligned}$$

En el cuadro siguiente, podemos encontrar la interpretación del valor negativo de la tensión, que hemos obtenido como resultado.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{x} & & \mathbf{x} \\
 + & & - \\
 \mathbf{v} = -0.5 \text{ V} & \equiv & \mathbf{v} = 0.5 \text{ V} \\
 - & & + \\
 \mathbf{y} & & \mathbf{y}
 \end{array}$$

Conocida la tensión entre los nudos \mathbf{x} e \mathbf{y} podemos ahora hallar los valores de la potencia y de las corrientes en cada rama del circuito:

$$i_1 = 12 * v = 12 * (-0,5) = - 6 \text{ A}$$

$$i_2 = 8 * v = 8 * (-0,5) = - 4 \text{ A}$$

$$P_{25} = 25 * 0,5 = 12,5\text{W} \text{ (entrega potencia. Compruébelo)}$$

$$P_{15} = 15 * 0,5 = 7,5\text{W} \text{ (recibe potencia)}$$

$$P_{12} = v^2 * g = (0,5)^2 * 12 = 3\text{W} \text{ (recibe potencia)}$$

$$P_8 = (0,5)^2 * 8 = 2\text{W} \text{ (recibe potencia)}$$

Balance energético : $12,5 = 7,5 + 3 + 2$

Veamos ahora otro ejemplo con fuentes controladas, como el representado en la figura 1.64.

La topología de la red de la fig. 1.64, nos muestra que todas las ramas tienen la misma tensión \mathbf{v} , la cual vamos a elegir como incógnita en nuestro análisis. Para hallar el valor de \mathbf{v} , acudimos a la ley de corrientes de Kirchoff, para plantear la ecuación siguiente:

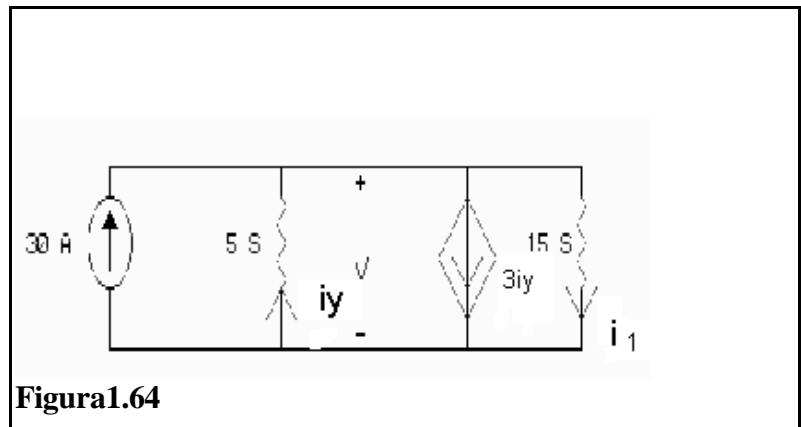


Figura 1.64

$$-30 - i_y + 3i_y + 15*v = 0 \tag{1.44}$$

En esta ecuación vemos que hay dos incógnitas i_y y v , pero si aplicamos la ley de Ohm a la conductancia en la cual circula i_y tenemos:

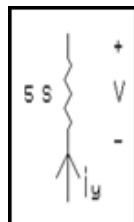


Figura 1.65

Como vemos el sentido de i_y contraviene la convención 1, luego $i_y = -5*v$.

Remplazando este valor en la ecuación (1.44) tenemos:

$$-30 + 2(-5*v) + 15*v = 0$$

$$5*v = 30$$

$$\therefore v = 6 \text{ V}$$

Conocido este valor podemos calcular el resto de variables de la red.

$$i_y = -5 * 6 = -30 \text{ A}$$

$$i_1 = 15 * v = 15 * 6 = 90 \text{ A}$$

$$3i_y = 3(-30) = -90 \text{ A}$$

$$P_{30} = 30 * 6 = 180 \text{ W (entrega potencia)}$$

$$P_5 = v^2 * g_1 = 36 * 5 = 180 \text{ W (recibe potencia)}$$

$$P_{3iy} = v * i = 6 * 90 = 540 \text{ W (entrega potencia)}$$

$$P_{15} = v * g = 36 * 15 = 540 \text{ W (recibe potencia)}$$

Balance energético: $180 + 540 = 180 + 540$

Tanto la fuente independiente como la controlada se comportan como elementos activos.

Como conclusión de los ejemplos anteriores, podemos decir lo siguiente: Cuando usemos las tensiones como incógnitas de la red, vamos a acudir a la ley de corrientes de Kirchoff para plantear las ecuaciones necesarias para analizar la red (Método de Nudos).

1.9 Divisor de tensión

Como una extensión de la interconexión de resistencias en serie consideremos el problema de la fig. 1.66, donde tenemos una tensión v (que no necesariamente es una fuente ideal de tensión) aplicada a dos resistores en serie, y queremos hallar la tensión en cada uno de los resistores.

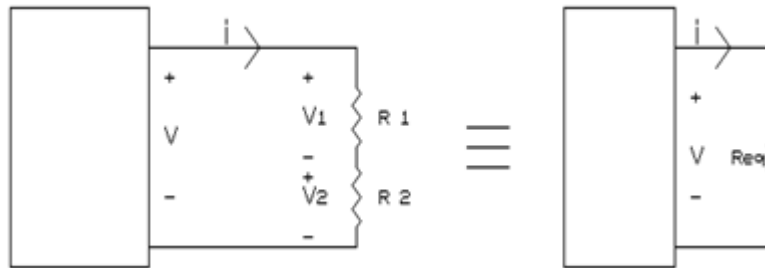


Figura 1.66

Si usted aplica el método utilizado en el numeral anterior, encontrará fácilmente la respuesta, pues sólo basta con determinar i , usando la ley de tensiones de Kirchoff, luego debe calcular los valores de v_1 y de v_2 . Pero resulta que este tipo de circuitos usted lo encontrará con mucha frecuencia en el análisis de circuitos por esa razón veremos una forma más directa de hallar los valores de v_1 y v_2 , aplicando la **relación del divisor de tensión**.

Como vemos en el circuito de la fig. 1.66, R_1 y R_2 están en **serie** (es muy importante que Ud. se dé cuenta de esto, puesto que de otra manera no podrá aplicar este concepto), luego la corriente que circula por ambos resistores (y por R_{eq}) es la misma, entonces podemos escribir:

$$i = \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} = \frac{v}{R_1 + R_2} \quad (1.45)$$

Es necesario enfatizar que para que se cumplan estas relaciones, los resistores R_1 y R_2

deben estar en **serie**. La expresión (1.45) es conocida como **relación del divisor de tensión**, y su nombre viene precisamente del hecho de que la tensión v aplicada, se divide (reparte) entre las resistencias quedando:

$$V_1 = v \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (1.46)$$

y

$$V_2 = v \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (1.47)$$

1.10 Divisor de corriente

Como una extensión de la interconexión de conductancias en **paralelo**, consideremos el problema de la fig. 1.67, donde una corriente i (que no necesariamente es una fuente ideal de corriente) es aplicada a dos conductancias en paralelo y queremos hallar la forma como se divide la corriente entre las conductancias (divisor de corriente).

Aplicando los métodos vistos anteriormente se pueden hallar los valores de i_1 e i_2 , pero este circuito conocido como **divisor de corriente**, es muy común en el análisis de circuitos, por lo tanto vamos a establecer una forma más expedita para hallar dichos valores.

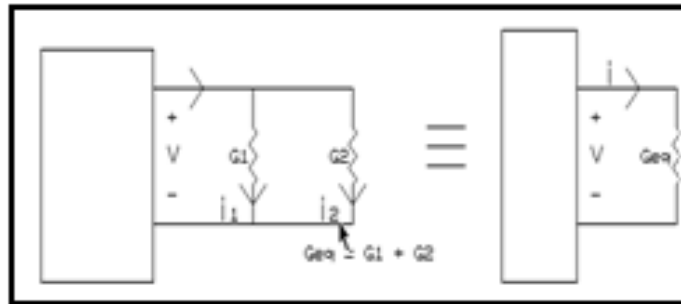


Figura 1.67

Puesto que las dos conductancias están interconectadas **en paralelo** (es necesario que así sea, para poder aplicar el divisor de corriente) tenemos que:

$$v = \frac{i_1}{g_1} = \frac{i_2}{g_2} = \frac{i}{g_1 + g_2} \quad (1.48)$$

luego
$$i_1 = \frac{g_1}{g_1 + g_2} i$$

$$i_2 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} i$$

Puesto que estas expresiones están en términos de las conductancias, con las cuales normalmente no están muy familiarizados los estudiantes que se inician en el análisis de circuitos, vamos a tratar de escribirlas en términos de las resistencias, luego:

$$i_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

$$i_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

1.11 Interconexión serie-paralelo

Hasta ahora hemos analizado circuitos muy simples, bien sea con todos los elementos interconectados en serie, o con todos los elementos interconectados en paralelo. Analicemos ahora circuitos un poco más complejos con interconexiones serie-paralelo.

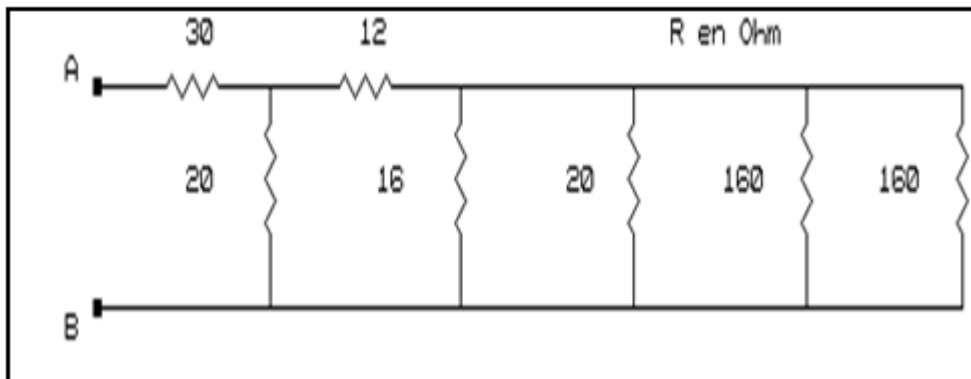


Figura 1.68

Consideremos el circuito de la fig. 1.68, donde se nos pide hallar la resistencia equivalente entre los terminales A y B. Para hallar la resistencia equivalente, alimentemos el circuito con una fuente ideal de tensión, conectada entre los terminales A y B, la cual hace circular una corriente i hacia el circuito resistivo, tal como se muestra en la fig. 1.69.

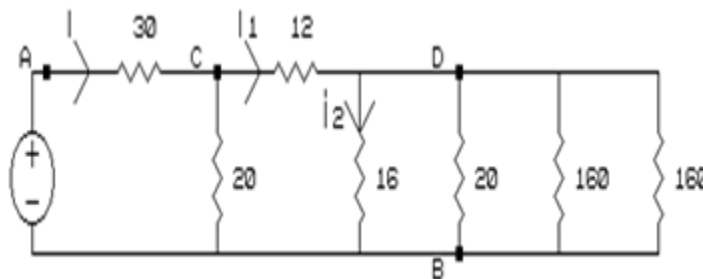


Figura 1.69

Las resistencias colocadas entre los nudos D y B están interconectadas en paralelo, (están todas sometidas a la misma tensión v_{DB}), luego se pueden reemplazar por una resistencia equivalente R_1 que vale:

$$\frac{1}{R_1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} = \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \frac{1}{160} + \frac{1}{160} = \frac{20}{160}$$

$\therefore R_1 = 8 \Omega$. Quedando el circuito así:

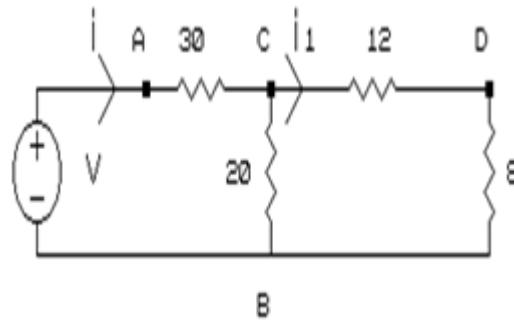


Figura 1.70

Por los resistores de 8Ω y 12Ω circula la misma corriente (están interconectados en serie), luego se pueden reemplazar por un resistor equivalente R_2 que vale:
 $R_2 = 12 + 8 = 20 \Omega$, obteniéndose el circuito:

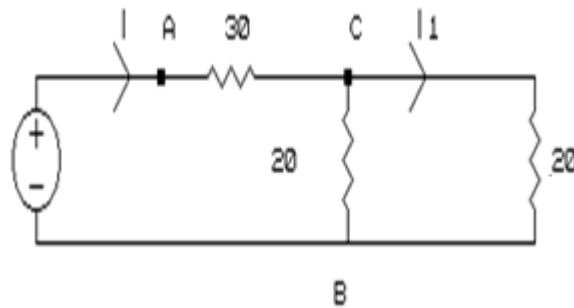


Figura 1.71

Los resistores de 20Ω quedan en paralelo y la resistencia equivalente será R_3 que vale

$$R_3 = \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} = 10 \Omega$$

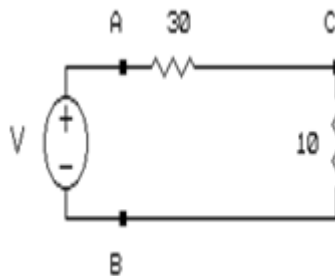


Figura 1.72

Quedando finalmente 2 resistores en serie que se pueden emplazar por uno solo.

$$R_{AB} = 40$$

Lo cual quiere decir que la resistencia equivalente entre los terminales A y B es de 40Ω .

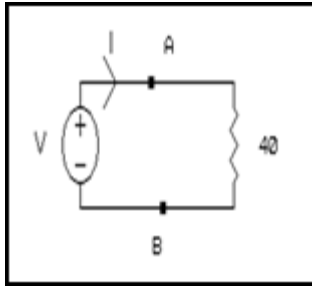


Figura 1.73

Tenemos que enfatizar que todos los circuitos que hemos ido dibujando (a medida que se ha ido haciendo las reducciones serie-paralelo) son equivalentes, esto quiere decir que si calculáramos la corriente i en el circuito final de la fig. 1.73 nos tiene que dar el mismo resultado que si lo hacemos en el circuito de la fig. 1.72, o de la fig.1.71. Para ilustrar esto, consideremos que la fuente $v = 200$ V y se nos pide hallar:

- a) la potencia entregada por la fuente, y
- b) las corrientes i_1 , i_2 y v_{BC} .

Solución : Para hallar la potencia entregada por la fuente podemos usar el circuito de la fig. 1.73.

$$\begin{aligned}
 -200 + 40i &= 0 \\
 \therefore i &= 5 \text{ A} \\
 P_{200} &= 200 * 5 = 1000 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Esta es la potencia entregada por la fuente de 200 V (único elemento activo en la red original). Podemos considerar que esta potencia la consume una sola resistencia equivalente de 40Ω , o también podemos considerar que es la suma de las potencias consumidas por las siete resistencias del circuito original (compruébelo!).

Para el cálculo de i_1 podemos utilizar el circuito de la fig. 1.71. Como se ve en el circuito original la corriente i_1 , sale del nudo C hacia la resistencia de 12Ω o sea, que es la misma mostrada en el circuito equivalente de la fig. 1.71. Como conocemos la corriente que entra al nudo C, podemos aplicar el divisor de corriente para hallar i_1 , puesto que las dos resistencias de 20Ω están en paralelo.

$$i_1 = \frac{20}{20+20} * 5 = 2.5 \text{ A}$$

lo cual quiere decir que la corriente se reparte por igual en ambas resistencias. Este mismo circuito me permite calcular v_{CB} :

$$v_{CB} = i_1 * 20 = 50 \text{ V}$$

Pero me piden $v_{BC} = -v_{CB} = -50 \text{ V}$

Este mismo valor lo hubiera podido hallar usando el circuito equivalente de la fig. 1.72

Como las dos resistencias están en serie podemos aplicar el divisor de tensión:

$$v_{CB} = \frac{10}{10+30} * 200 = 50 \text{ V}$$

$$\text{y } v_{BC} = -v_{CB} = -50 \text{ V}$$

Un error muy común es aplicar un divisor de tensión al circuito de la fig. 1.74.

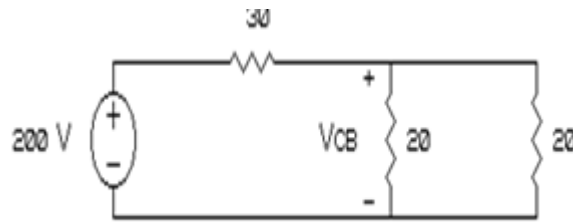


Figura 1.74

El error consiste en considerar que la resistencia de 30 Ω y la primera resistencia de 20 Ω están en serie, lo cual daría el siguiente resultado al aplicar el divisor de tensión:

$$V_{CB} = \frac{20}{20+30} * 200 = 80 \text{ V}$$

Este es un resultado falso. Antes de aplicar el divisor de tensión debemos reducir el circuito a 2 resistencias en serie.

Para hallar i_2 calculemos v_{DB} en la fig. 1.70.

Por divisor de tensión:

$$V_{DB} = V_{CB} * \frac{8}{12+8} = \frac{8}{20} * 50 = 20 \text{ V}$$

y al aplicar la ley de Ohm ,en el circuito original se tiene

$$i_2 = \frac{v_{DB}}{16} = \frac{20}{16} = 1,25 \text{ A}$$

También se hubiera podido calcular, usando un divisor de corriente (hágalo!).

Al aplicar el divisor de corriente, se comete con mucha frecuencia el error que voy a ilustrar a continuación:

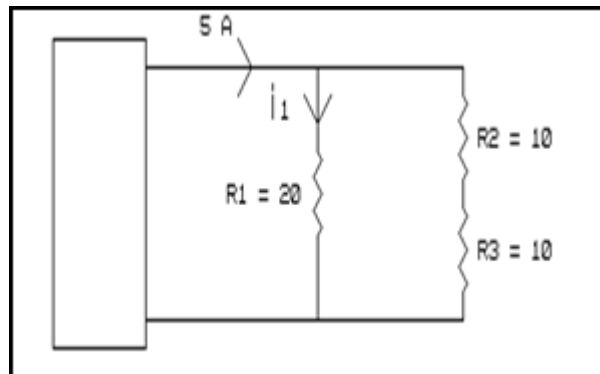


Figura 1.75

Al querer calcular i_1 , se considera que R_1 y R_2 están en paralelo (lo cual es falso), y se aplica el divisor de corriente así:

$$i_1 = 5 * \frac{10}{20+10} = \frac{5}{3} \text{ A}$$

resultado falso, por supuesto. Luego antes de aplicar el divisor de corriente debemos reducir el circuito a 2 resistencias en paralelo, esto es, debemos sumar las dos resistencias en serie ($10 + 10 = 20 \Omega$).

Veamos otro problema. Calculemos corriente, tensión y potencia en cada uno de los elementos del circuito de la fig.1.76. Además se pide calcular v_x .

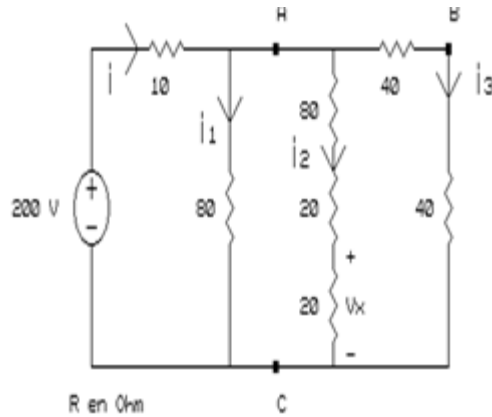


Figura 1.76

Reduciendo las resistencias en serie tenemos:

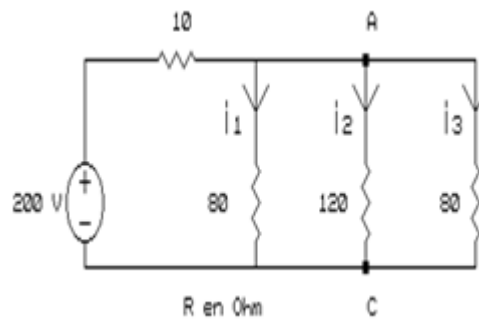


Figura 1.77

Como las últimas 3 resistencias están en paralelo las reducimos a una resistencia equivalente, R_2 , que vale:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{80} = \frac{3 + 2 + 3}{240} = \frac{8}{240}$$

$$\therefore R_2 = 30 \Omega$$

Quedando el circuito equivalente de la fig.1.78, donde podemos hallar el valor de i , aplicando la ley de tensiones de Kirchoff.

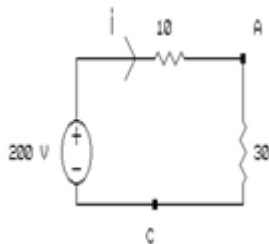


Figura 1.78

$$- 200 + 10i + 30i = 0$$

$$\therefore i = \frac{200}{40} = 5 \text{ A}$$

$$P_{200} = 200 * 5 = 1000 \text{ W (entrega potencia)}$$

$$P_{10} = i^2 R = 25 * 10 = 250 \text{ W (recibe potencia)}$$

En el circuito de la fig.1.77. Vemos que los tres resistores tienen la misma tensión, puesto que están interconectados en paralelo, entonces para hallar la corriente que circula por cada uno de ellos basta con determinar el valor de v_{AC} en la fig.1.78. Aplicando la relación del divisor de tensión tenemos:

$$v_{AC} = 200 * \frac{30}{10+30} = 150 \text{ V}$$

$$\text{luego } i_1 = \frac{150}{80} = \frac{15}{8} \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{150}{120} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

$$i_3 = i_1 = \frac{15}{8} \text{ A}$$

la suma de estas tres corrientes tiene que darnos un total de 5 A (¿por qué? Compruébelo).

Calculemos ahora la potencia consumida (recuerde que los resistores son elementos disipativos) por los demás resistores del circuito original de la fig. 1.7.13.

$$P_{80a} = i_1^2 * 80 = (15/8)^2 * 80 = 281,25 \text{ W}$$

$$P_{80b} = i_2^2 * 80 = (5/4)^2 * 80 = 125 \text{ W}$$

$$P_{20} = i_2^2 * 20 = (5/4)^2 * 20 = 31,25 \text{ W}$$

$$P_{40} = i_3^2 * 40 = (15/8)^2 * 40 = 140,625 \text{ W}$$

Los dos resistores de 20 Ω , en la rama por la cual circula i_2 , consumen la misma potencia de 31,25 W. Lo mismo ocurre con los resistores en la rama donde circula i_3 , cada uno de los resistores consume 140,625W.

Balance de Potencia:

$$1000 = 250 + 281,25 + 125 + 2 * 31,25 + 2 * 140,625$$

Para calcular v_x , separemos la rama donde circula la corriente i_2 (ver fig.1.79).

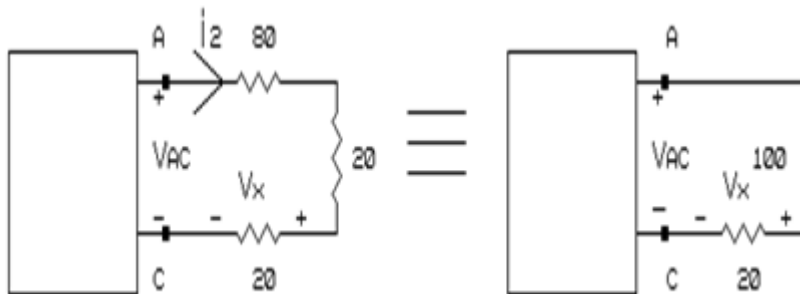


Figura 1.79

En el circuito de la fig. 1.79, hemos utilizado la reducción serie, con el objeto de tener sólo 2 resistores en serie y aplicar la relación del divisor de tensión:

$$v_x = v_{AC} * \frac{20}{20+100} = 150 * \frac{20}{120} = 25 \text{ V}$$

Esto nos hace recordar que la tensión total aplicada a cualquier conjunto de resistencias en serie se reparte entre dichas resistencias. Así por ejemplo, vemos en la rama donde circula la corriente i_3 (fig. 1.76) hay 2 resistores de 40 Ω en serie y la tensión total

aplicada es $v_{AC} = 150$, luego en cada resistor aparecerá una tensión de 75 V (cálculélo!).

Hagamos ahora un ejemplo donde apliquemos el concepto de conductancias.

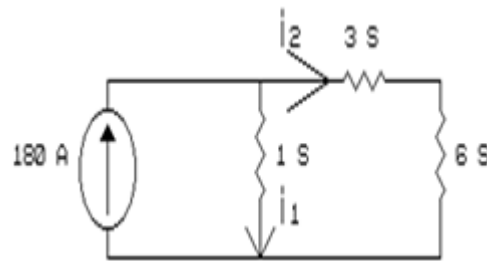


Figura 1.80

Consideremos el circuito de la fig.1.80, donde se quiere determinar tensión, corriente y potencia en cada uno de los elementos.

Solución: Las conductancias de 3 S y 6 S están en serie, luego las podremos reducir a una sola. Sabemos que para dos resistencias en serie se cumple que :

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

luego si trabajamos con conductancias, tenemos:

$$\frac{1}{g_{eq}} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} = \frac{g_1 + g_2}{g_1 g_2}$$

$$g_{eq} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = 2 \text{ S}$$

luego el circuito se reduce a:

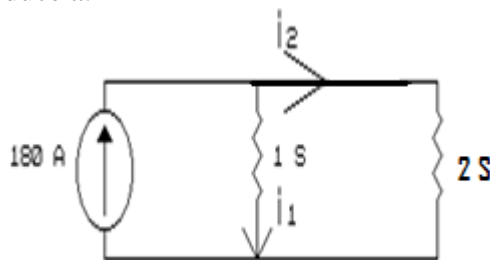


Figura 1.81

Para hallar i_1 e i_2 , podemos aplicar la relación del divisor de corriente donde:

$$v = \frac{i_1}{1} = \frac{i_2}{2} = \frac{180}{2+1} = 60 \text{ V}$$

$$i_1 = 180 * \frac{1}{2+1} = 60 \text{ A}$$

$$i_2 = 180 * \frac{2}{2+1} = 120 \text{ A}$$

En las conductancias de 3 y 6 siemens hay una tensión $v = 60$ V, la cual se reparte en ambas conductancias de acuerdo a la relación del divisor de tensión.

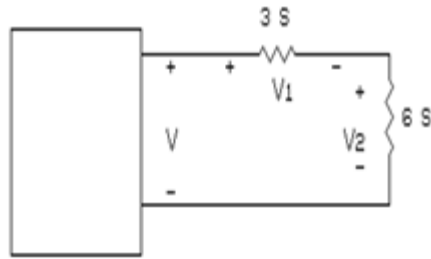


Figura 1.82

Recuerde que la relación del divisor de tensión se expresó en términos de resistencias, y en este problema estamos usando conductancia (inverso de las resistencias), luego:

$$v_1 = v * \frac{1/3}{1/3+1/6} = 60 * \frac{1/3}{9/18} = 60 * \frac{18}{27} = 40 \text{ V}$$

$$v_2 = v * \frac{1/6}{1/3+1/6} = 60 * \frac{1/6}{9/18} = 60 * \frac{18}{54} = 20 \text{ V}$$

Cálculo de las potencias en cada elemento:

$$P_{180A} = 180 * 60 = 10800 \text{ W}$$

$$P_1 = \frac{v_1^2}{R_1} = v_1^2 * g_1 = 60^2 * 1 = 3600 \text{ W}$$

$$P_3 = i_2^2 R_2 = i_2^2 / g_2 = 120^2 / 3 = 4800 \text{ W}$$

$$P_6 = i_2^2 / 6 = 120^2 / 6 = 2400 \text{ W}$$

Balance de potencia: $10800 = 3600 + 4800 + 2400$

1.12 Transformaciones Triángulo - Estrella y Estrella - Triángulo

En algunas ocasiones nos encontramos con circuitos que no pueden reducirse por transformaciones serie paralelo, motivo por el cual explicaremos a continuación un par de transformaciones que nos ayudarán a resolver estos problemas.

1.12.1 Transformación estrella - triángulo:

Consideremos el circuito de la fig. 1.83 donde a los nudos A B y C se han conectado tres resistencias R_a , R_b y R_c formando una estrella.

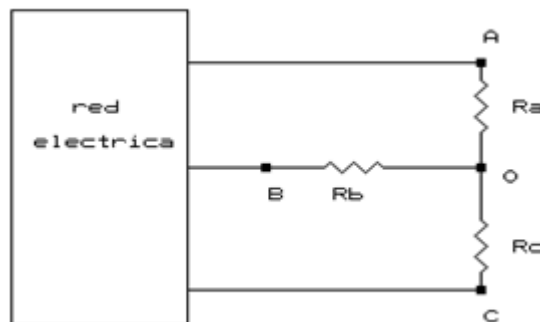


Figura 1.83

Es posible sustituir la estrella conformada por los resistores R_a , R_b y R_c por un triángulo de resistores equivalente formado por R_{ab} , R_{bc} y R_{ca} , tal como se muestra en la fig. 1.84.

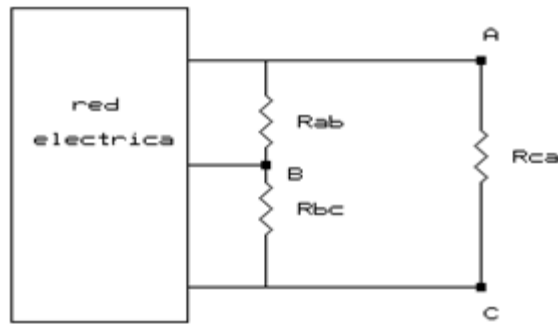


Figura 1.84

Los valores de los resistores R_{ab} , R_{bc} y R_{ca} se calculan de acuerdo a la ecuación (1.8.1).

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \sum RR/R_c \\ R_{bc} &= \sum RR/R_a \end{aligned} \quad (1.8.1)$$

$$R_{ca} = \sum RR/R_b$$

Donde:

$$\sum RR = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c$$

Transformación triángulo - estrella:

Esta es la transformación inversa de la anterior, esto es, se tiene una red de resistencias conectados en triángulo (ver fig. 1.84) y se quiere sustituir por una red en estrella (fig. 1.83). Esto se puede lograr mediante las siguientes fórmulas de transformación:

$$\begin{aligned} R_a &= R_{ab} * R_{ca} / \sum R \\ R_b &= R_{ab} * R_{bc} / \sum R \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

$$R_c = R_{ca} * R_{bc} / \sum R$$

Donde:

$$\sum R = R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}$$

Cuando todas las resistencias son iguales se tiene el caso particular siguiente:

$$R_a = R_b = R_c = R_Y$$

Implica que

$$R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R\Delta$$

Donde

$$R_Y = R\Delta/3 \quad \text{o} \quad R\Delta = 3 R_Y$$

Ejemplo 1.8.1. Halle la resistencia equivalente entre los terminales A y B de la fig. 1.85, aplicando las transformaciones vistas.

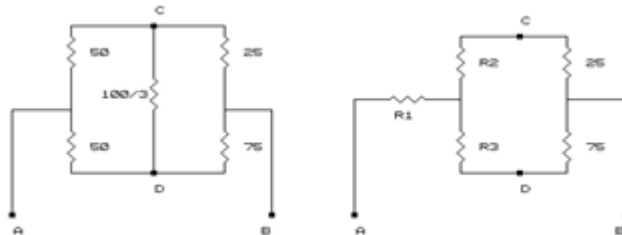


Figura 1.85

Donde $R_1 = 50 \cdot 50 / \sum R = 75/4 \Omega$ $\sum R = 50 + 50 + \frac{100}{3} = 400/3$
 $R_2 = R_3 = (50 \cdot 100/3) / (400/3) = 50/4 = 25/2 \Omega$

Esto se logra transformando el triángulo ACD en una estrella. También se pudo haber transformado el triángulo BCD.

Luego la red queda así:

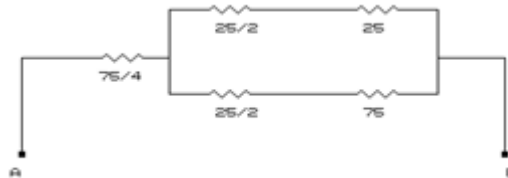


Figura 1.86

$R_{AB} = 45 \Omega$

También es posible simplificar la red transformando la estrella formada por las resistencias de 50 Ω , 25 Ω y 100/3 Ω o la estrella de 50 Ω , 75 Ω y 100/3 Ω en un triángulo. Hagamos el ejemplo transformando la primera estrella mencionada.

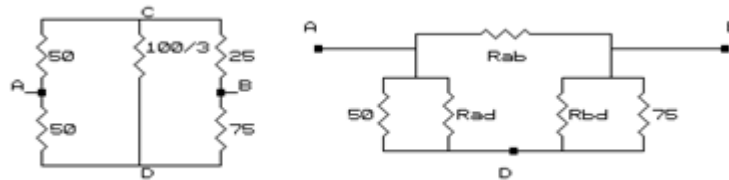


Figura 1.87

Donde $R_{ab} = 3570/100/3 = 225/2 \Omega$

$R_{ad} = 3750/25 = 50 \Omega$

$\sum RR = 50 * 25 + 50 * \frac{100}{3} + 25 * \frac{100}{3} = 3750 \Omega$

$R_{bd} = 3750/50 = 75 \Omega$

Luego la red queda así:

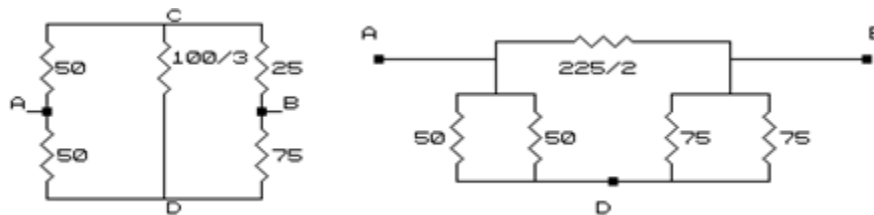


Figura 1.88

$R_{AB} = 45 \Omega$

1.13 Análisis de redes en escalera

Una red que tiene la estructura de la red mostrada en la fig. 1.89, es conocida como una red en escalera. Para el análisis de este tipo de redes se usa un "truco" que consiste en asumir una tensión o corriente en la última rama de la red e ir hallando tensiones y corrientes en las siguientes ramas, tal y como se ilustra a continuación:

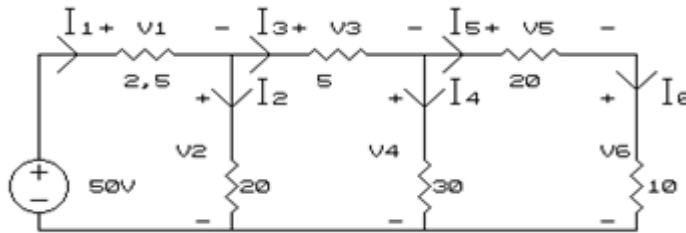


Figura 1.89

Supongamos que se conoce el valor de I_6 , luego tenemos:

$$V_6 = 10 I_6$$

$$I_5 = I_6$$

$$V_5 = 20 I_6$$

$$V_4 = V_5 + V_6 = 30 I_6$$

$$I_4 = V_4 / 30 = 30 I_6 / 30 = I_6$$

$$I_3 = I_4 + I_5 = 2 I_6$$

$$V_3 = 5 I_3 = 10 I_6$$

$$V_2 = V_3 + V_4 = 40 I_6$$

$$I_2 = V_2 / 20 = 2 I_6$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 4 I_6$$

$$V_1 = 2,5 I_1 = 10 I_6$$

$$50 = V_1 + V_2 = 50 I_6$$

De esta última ecuación obtenemos que $I_6 = 1$ A, y a partir de este valor podemos hallar el resto de variables:

$$I_5 = I_6 = 1 \text{ A}$$

$$V_5 = 20 I_6 = 20 \text{ V}$$

$$V_4 = 30 I_6 = 30 \text{ V}$$

$$I_4 = I_6 = 1 \text{ A}$$

$$I_3 = 2 I_6 = 2 \text{ A}$$

$$V_3 = 10 I_6 = 10 \text{ V}$$

$$V_2 = 40 I_6 = 40 \text{ V}$$

$$I_2 = 2 I_6 = 2 \text{ A}$$

$$I_1 = 4 I_6 = 4 \text{ A}$$

$$V_1 = 10 I_6 = 10 \text{ V}$$

También podemos observar, que la resistencia de entrada de este circuito se puede calcular en una forma sistemática, por simple reducción de resistencias serie paralelo. Tal como se muestra en la fig 1.90, donde se obtiene finalmente una resistencia de entrada de $12,5 \Omega$.

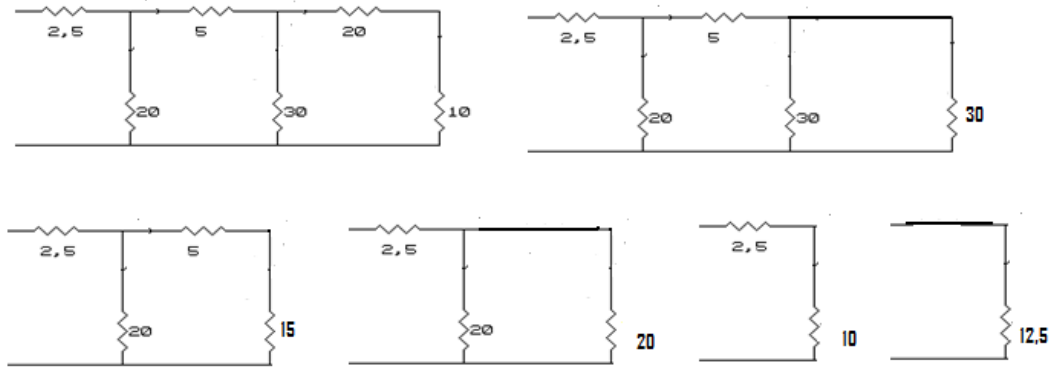


Figura 1.90

El método anterior se puede sintetizar en la fórmula siguiente:

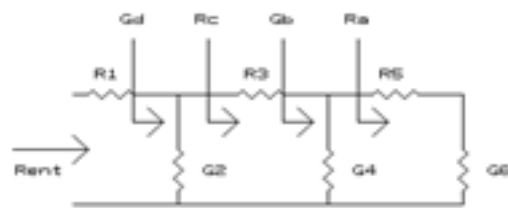


Figura 1.91

$$R_{en} = R1 + \frac{1}{G2 + \frac{1}{R3 + \frac{1}{G4 + \frac{1}{R5 + \frac{1}{G6}}}}}$$

Observando la fig. 1.91, vemos que las ramas paralelo las hemos asignado como conductancias y las ramas serie como resistencias. Tiene que tener presente que si la red empieza por una rama paralela, el término R_1 no aparecerá en la expresión de la R_{en} . Consideremos por ejemplo la red en escalera de la fig. 1.92.

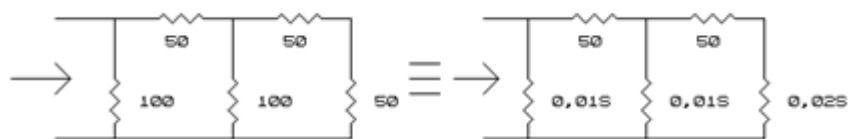


Figura 1.92

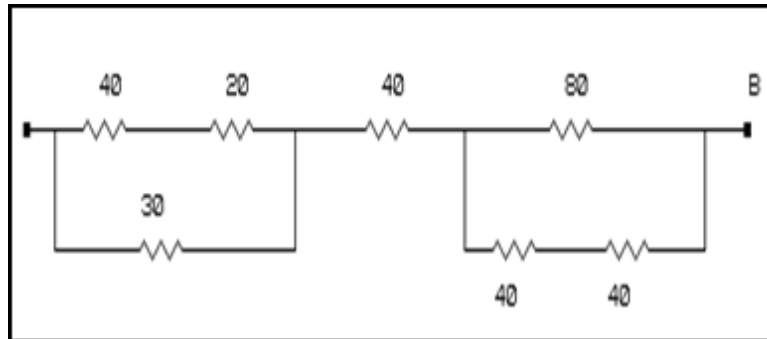
En este caso la R_{en} se calcula así :

$$Ren = \frac{1}{0,01 + \frac{1}{50 + \frac{1}{0,01 + \frac{1}{50 + \frac{1}{0,02}}}}}$$

El método usado para analizar redes en escalera es sencillo de aplicar, practíquelo que en cualquier momento le puede ser útil.

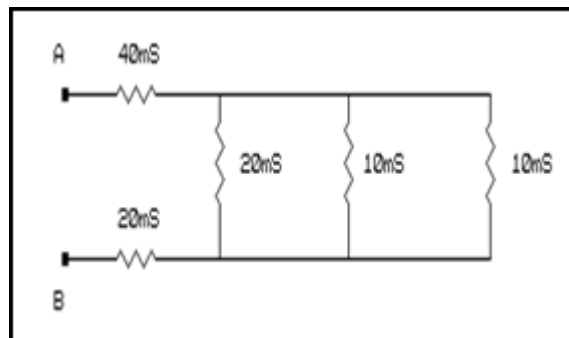
EJERCICIOS

- 1) Calcule la resistencia R_{AB} ($R_{AB} = 100 \Omega$)



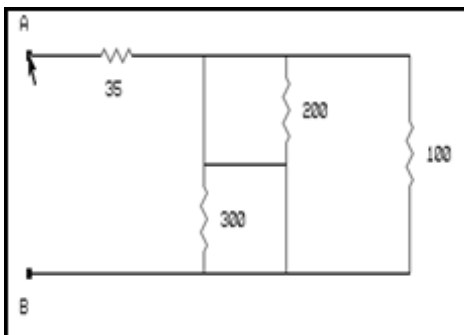
FiguraP.1.1

- 2) Hallar la conductancia G_{AB} . ($G_{AB} = 100 \text{ mS}$)



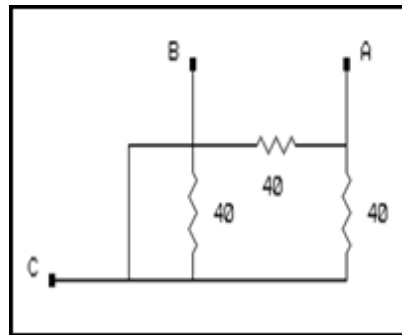
FiguraP.1.2

- 3) Hallar R_{AB} . ($R_{AB} = 35 \Omega$)



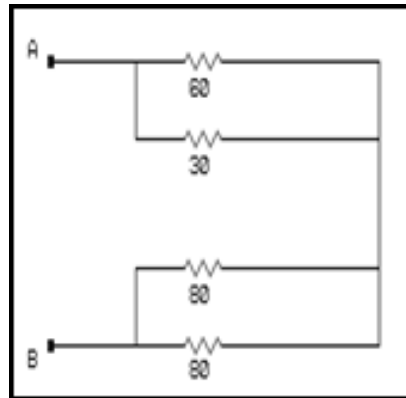
FiguraP.1.3

4) Hallar R_{AB} y R_{BC} ($R_{AB} = 20 \Omega$ $R_{BC} = 0 \Omega$)



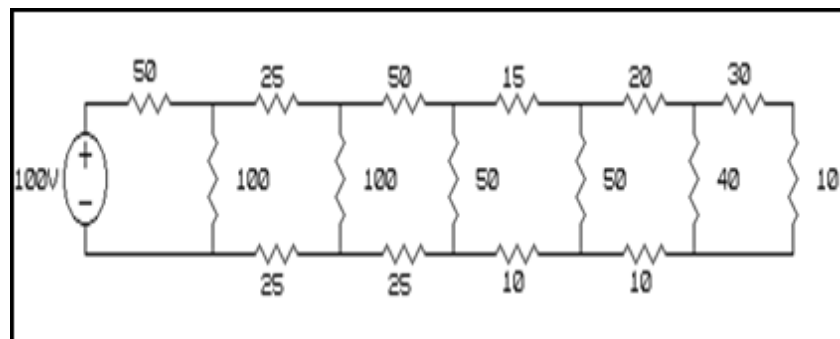
FiguraP.1.4

5) Hallar R_{AB} . ($R_{AB} = 60 \Omega$)



FiguraP.1.5

6) Hallar P_{100V} , R_{AB} , i_x y v_x . ($R_{AB} = 100 \Omega$ $i_x = 0,25 A$ $v_x = 12,5 V$ $P_{100V} = 100 W$)



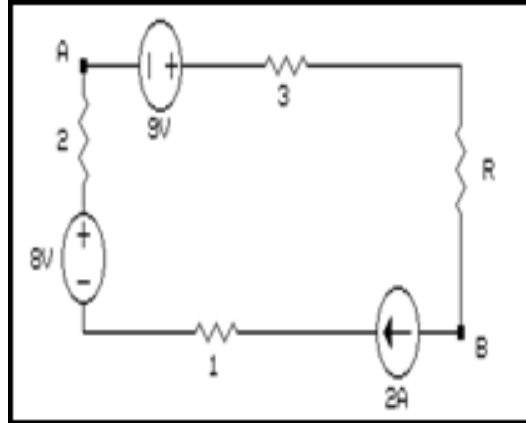
FiguraP.1.6

7) Si $v_{AB} = 5$ V. Halle R y la potencia en cada elemento.

$$P_{2A} = 6 \text{ W} \quad P_{8V} = 16 \text{ W} \quad P_{9V} = 18 \text{ W}$$

$$P_{1\Omega} = 4 \text{ W} \quad P_{2\Omega} = 8 \text{ W} \quad P_{3\Omega} = 12 \text{ W}$$

$$P_R = 16 \text{ W} \quad R = 4 \Omega$$



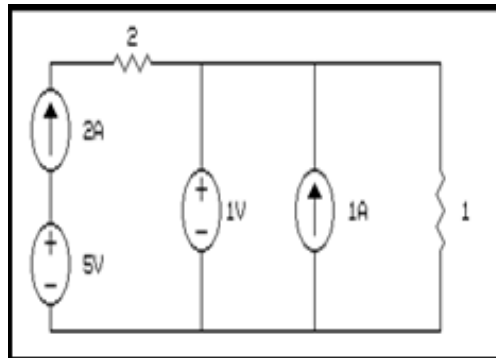
FiguraP.1.7

8) Halle potencia en cada elemento. Compruebe el balance de potencias.

$$P_{5V} = 10 \text{ W} \quad P_{1V} = 2 \text{ W}$$

$$P_{2A} = 0 \text{ W} \quad P_{1A} = 1 \text{ W}$$

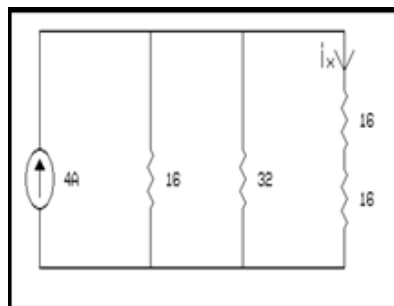
$$P_{2\Omega} = 8 \text{ W} \quad P_{1\Omega} = 1 \text{ W}$$



FiguraP.1.8

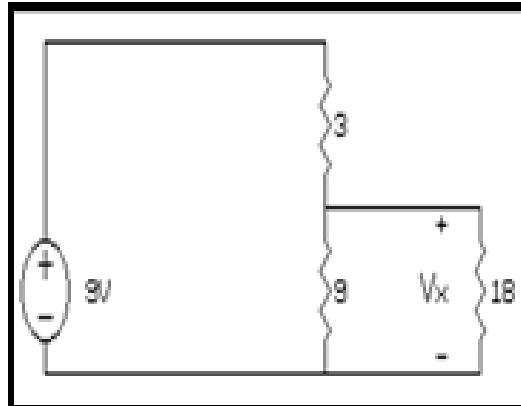
9) Halle i_x . Use la relación del divisor de corriente.

$$(i_x = 1 \text{ A})$$



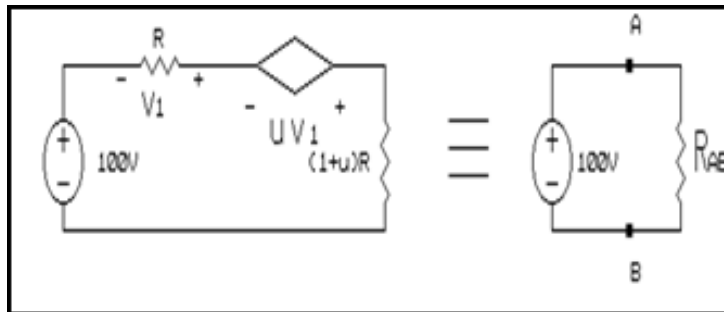
FiguraP.1.9

10) Halle v_x . Use relación del divisor de tensión.
 ($v_x = 6 \text{ V}$)



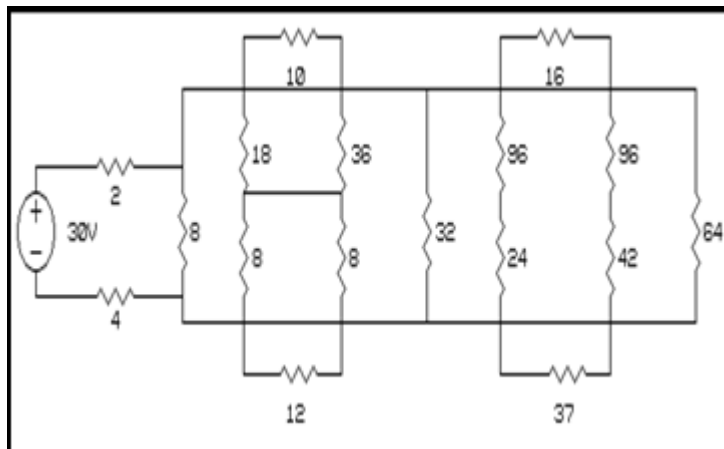
FiguraP.1.10

11) Si $R = 10 \Omega$, $\mu = 9$ y los dos circuitos son equivalentes halle R_{AB} . ($R_{AB} = 200 \Omega$)



FiguraP.1.11

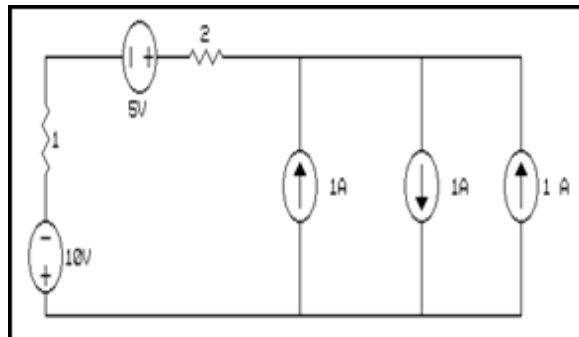
12) Halle R_{AB} y potencia entregada por la fuente.
 ($R_{AB} = 10 \Omega$ $P_{30V} = 90 \text{ W}$)



FiguraP.1.12

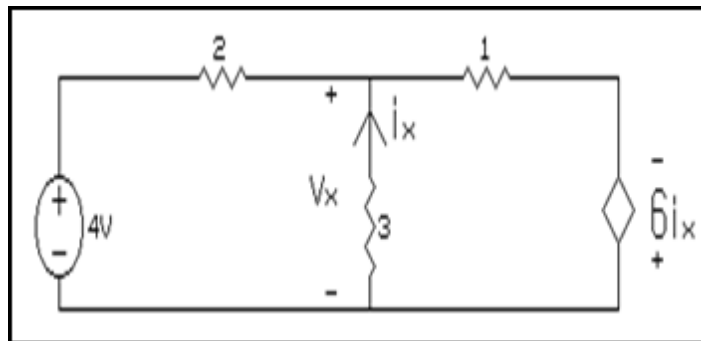
(pista: tenga presente que algunas resistencias están en paralelo con un cortocircuito).

- 13) Halle potencia en la fuente de tensión de 5 V.
(Recibe 5 W)



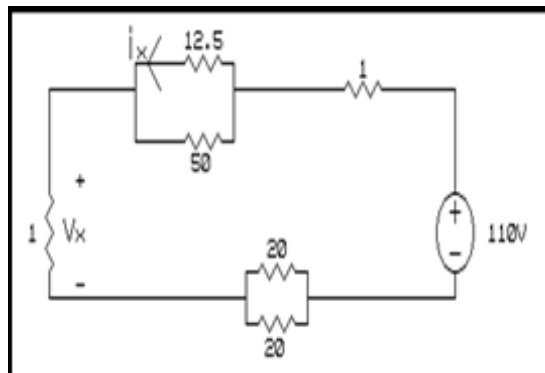
FiguraP.1.13

- 14) Si $v_x = -12$ V. Halle potencia en cada elemento.
($P_{4V} = 32$ W $P_{6ix} = 288$ W $P_{2r} = 128$ W $P_{3\Omega} = 48$ W $P_{1\Omega} = 144$ W)



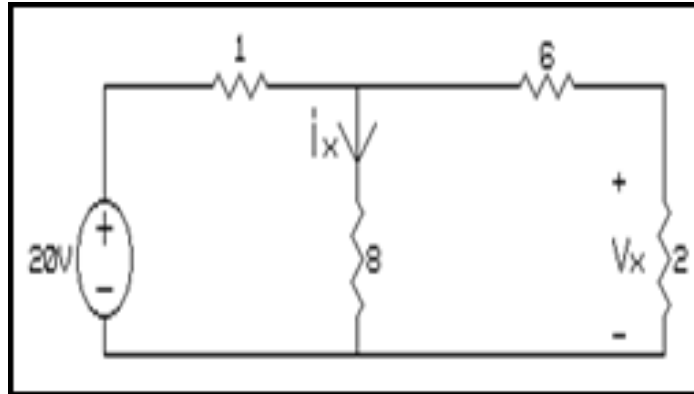
FiguraP.1.14

- 15) Halle v_x e i_x en los siguientes circuitos:
($v_x = 5$ V $i_x = 4$ A)



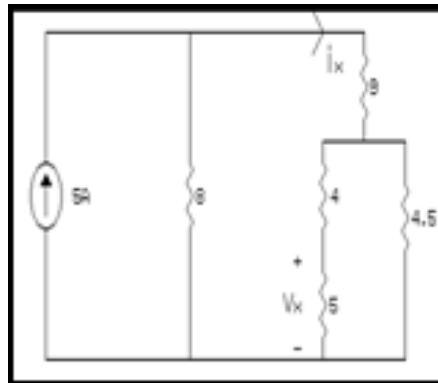
FiguraP.1.15

$(v_x = 4 \text{ V } i_x = 2 \text{ A})$



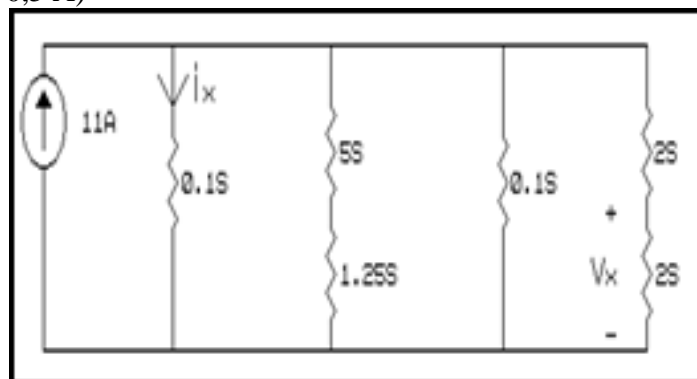
FiguraP.1.16

$(v_x = 10/3 \text{ V } i_x = 2 \text{ A})$



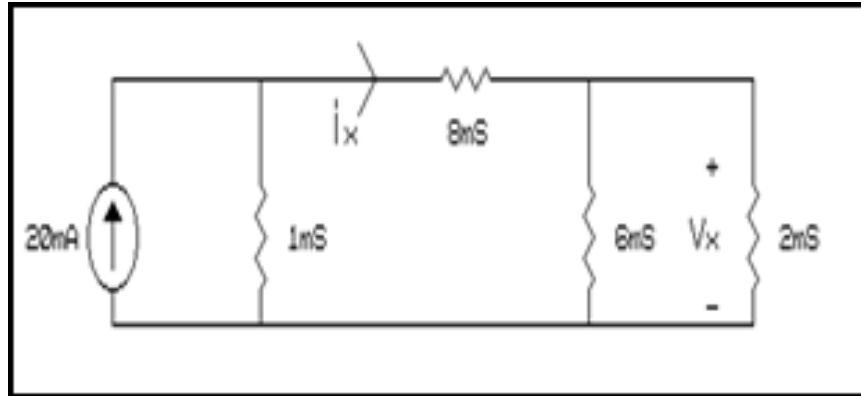
FiguraP.1.17

$(v_x = 2,5 \text{ V } i_x = 0,5 \text{ A})$



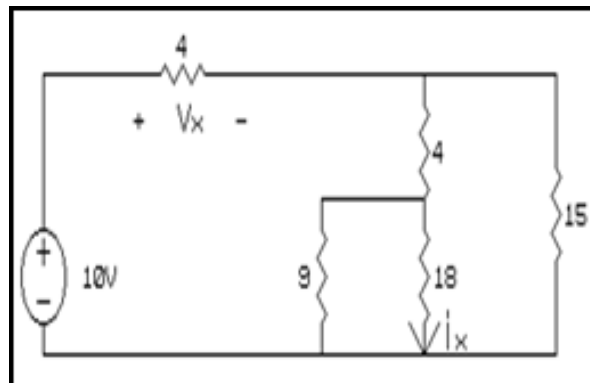
FiguraP.1.18

$(v_x = 2 \text{ V } i_x = 16 \text{ mA})$



FiguraP.1.19

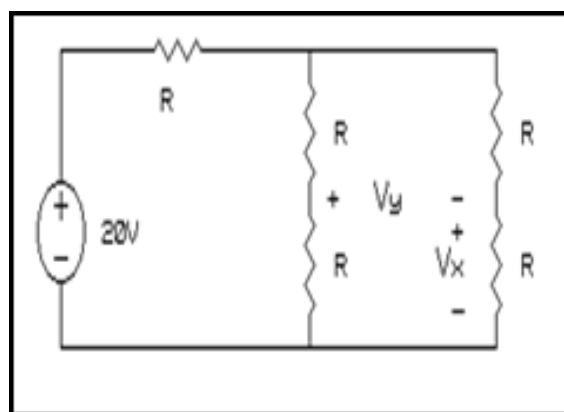
$(v_x = 4 \text{ V } i_x = 0,2 \text{ A})$



FiguraP.1.20

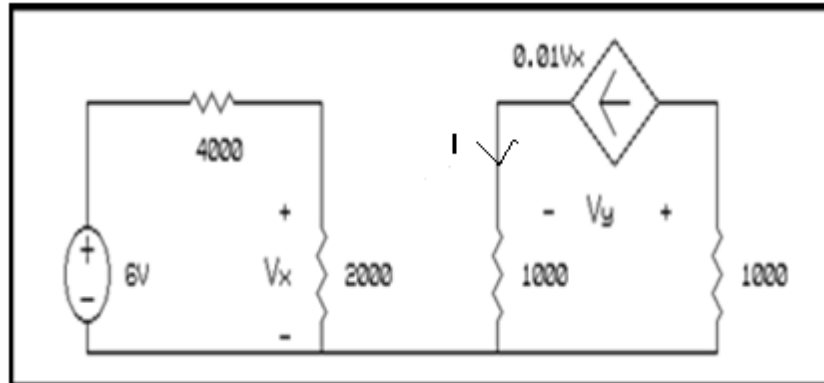
16) Halle v_x y v_y (use divisor de tensión).

$(v_x = 5 \text{ V } v_y = 0 \text{ V})$



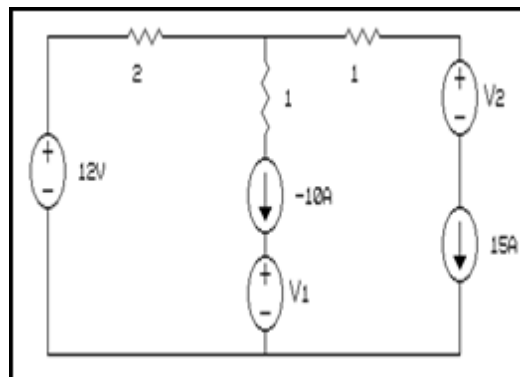
FiguraP.1.21

- 17) Halle I y v_y .
 ($I = 20 \text{ mA}$ $v_y = -40 \text{ V}$)



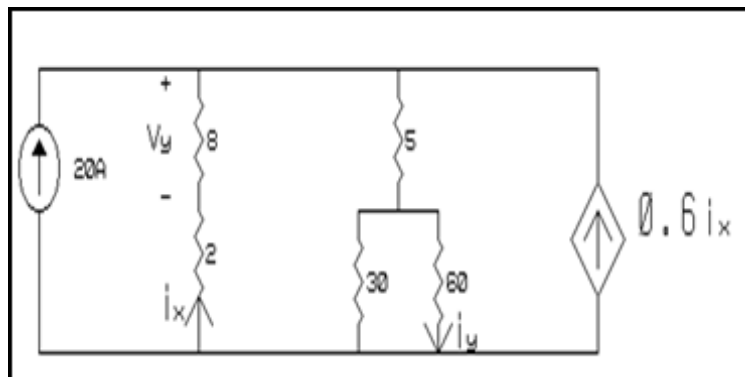
FiguraP.1.22

- 18) Si $P = 0 \text{ W}$ en la fuentes de corriente, halle v_1 y v_2 .
 ($v_1 = 12 \text{ V}$ $v_2 = -13 \text{ V}$)



FiguraP.1.23

- 19) Hallar v_y e i_y .
 ($i_y = 4/3 \text{ A}$ $v_y = 80 \text{ V}$)



FiguraP.1.24

20) Hallar i_x y v_y . ($i_x = 1/3$ A $v_y = 25$ V)

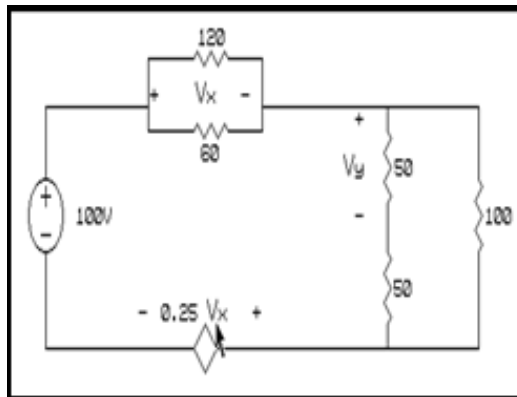
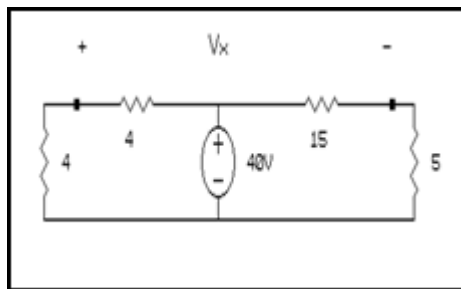


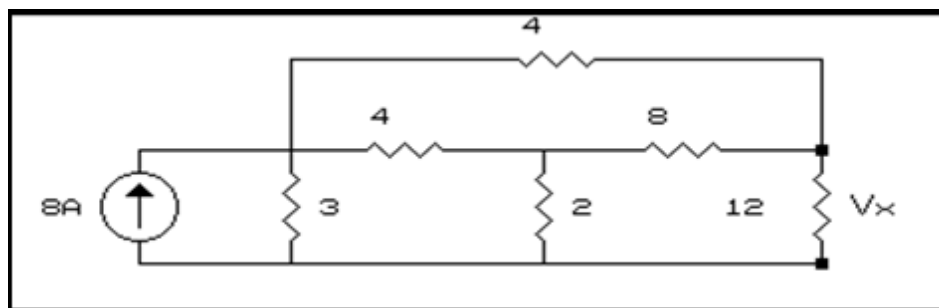
Figura p.1.25

21) Halle v_x (use divisor de tensión). ($v_x = 10$ V)



FiguraP.1.26

22) Aplicar la transformación triángulo-estrella para hallar v_x . ($v_x = 9$ V)



FiguraP.1.27

23) Hallar I y R_{en} . Use la transformación triángulo-estrella y estrella-triángulo para hallar R_{en} . ($I = 2$ A $R_{en} = 30$ Ω)

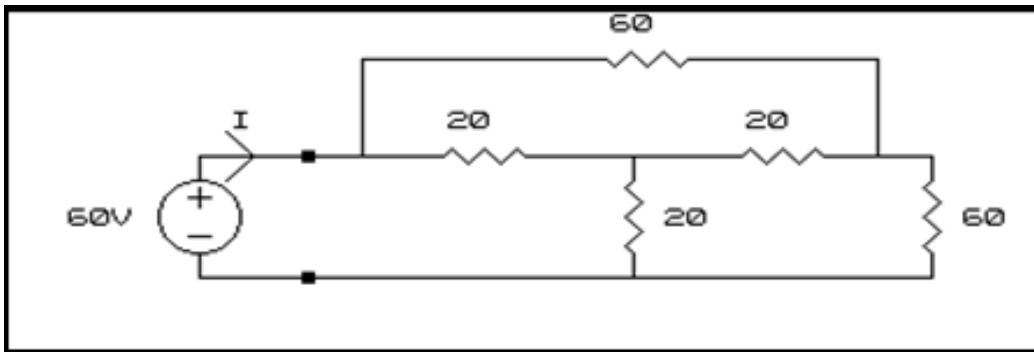


Figura P.1.28

24) Hallar v_x y R_{en} . $v_x = 25V$ ($R_{en} = 25 \Omega$)

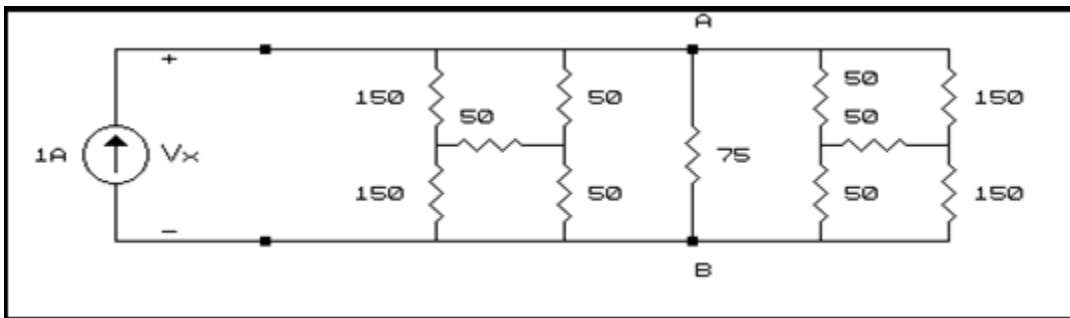


Figura P.1.29

25) Hallar v_x . ($v_x = 10 V$)

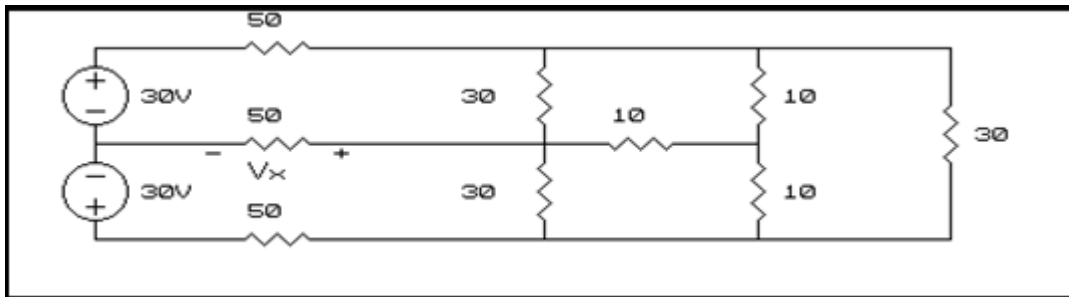


Figura P.1.30

26) Hallar tensión y corriente en cada rama de la red en escalera. Halle R_{en} . ($I_1 = 10 A$
 $I_2 = 8 A$ $I_3 = 2 A$
 $v_1 = 40 V$ $v_2 = 160 V$ $v_3 = 20 V$ $v_4 = 140 V$)

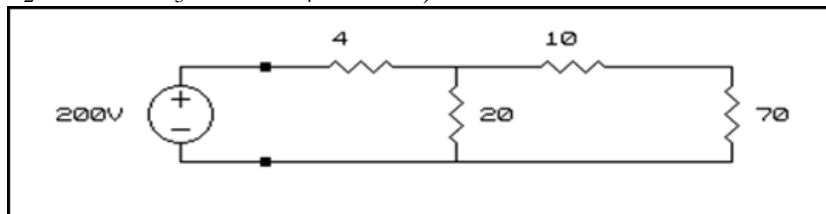


Figura P.1.31

CAPITULO 2

TÉCNICAS PARA EL ANÁLISIS DE REDES ELÉCTRICAS

2.1 Introducción.

Ya vimos que en aquellos circuitos donde todos sus elementos están interconectados en serie (lo cual implica que por todos ellos circula la misma corriente), debemos elegir como incógnita la corriente, para simplificar el análisis de dicho circuito. De acuerdo a la definición de malla, podemos decir que dichos circuitos tienen una **sola malla**. En este caso usamos la ley de tensiones de Kirchoff, para plantear la ecuación que nos permite hallar el valor de la corriente que circula por los diferentes elementos.

También analizamos circuitos, donde todos sus elementos estaban conectados entre el mismo par de nudos. En ellos, lo más lógico, fué elegir la tensión como incógnita y utilizar la ley de corrientes de Kirchoff para el planteo de la ecuación necesaria para hallar el valor de dicha incógnita. Podemos decir que dichos circuitos tienen un **solo par de nudos**.

Cuando la red es más compleja, posiblemente no podamos hacer las reducciones necesarias para convertir la red en estudio, en una red simple, como las que hemos analizado hasta ahora. En estos casos tendremos que acudir a otros métodos como los que estudiaremos a continuación: Método de corrientes de rama, Método de corrientes de Malla y Método de Nudos.

Consideremos el circuito mostrado en la fig. 2.1.1 donde podemos distinguir fácilmente 2 mallas, que por los métodos hasta ahora vistos, no puede reducirse a un circuito con una sola malla.

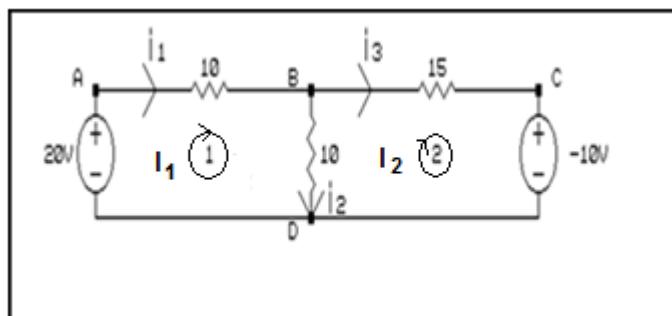


Figura2.1.1

En este ejemplo vemos que todos los elementos no están en serie, por lo tanto, si queremos elegir como incógnitas las corrientes, tenemos dos alternativas:

1. Asignar una corriente diferente a cada una de las ramas formadas por elementos interconectados en serie, (i_1 , i_2 e i_3), por ejemplo: la corriente i_1 circula, tanto por la fuente de 20 V como por la resistencia en serie de 10Ω . Esta asignación de incógnitas

en el análisis de la red corresponde al llamado método de corrientes de rama, puesto que hemos asignado una corriente diferente a cada rama formada por elementos interconectados en serie.

2. Asignar una corriente a cada una de las mallas del circuito, en este caso son I_1 e I_2 . Esta asignación corresponde al llamado Método de Mallas que estudiaremos después.

2.2 Método de corrientes de rama.

Concentremos nuestra atención, por ahora, en el método de corrientes de rama, donde el primer paso consiste en asignar una corriente de rama a cada una de las ramas **serie**; el sentido de estas corrientes es arbitrario, pero recuerde que una vez asignado este sentido, queda fijada automáticamente la polaridad en los elementos pasivos (recuerde la convención #1).

El siguiente paso será plantear tantas ecuaciones **independientes**, como incógnitas haya. Para lo cual se utilizan las leyes de Kirchoff. Como las incógnitas son corrientes, utilicemos primero la ley de tensiones de Kirchoff, la cual nos permite plantear **solo** dos ecuaciones independientes, puesto que el circuito analizado tiene sólo 2 mallas. Al aplicar esta ley tenemos:

$$M1) \quad + 10i_1 + 10i_2 - 20 = 0 \quad (2.2.1)$$

$$M2) \quad + 15i_3 - 10i_2 - 10 = 0 \quad (2.2.2)$$

Usted puede plantear otras ecuaciones, usando por ejemplo la malla ABCDA, pero la ecuación obtenida no será independiente de las anteriores. Por lo tanto recuerde: sólo puede plantear un número de ecuaciones independientes, igual al número de mallas del circuito, cuando usa la ley de tensiones de Kirchoff. El concepto de mallas se profundizará un poco más, cuando estudiemos el método de mallas en la próxima sección.

Hasta ahora tenemos sólo dos ecuaciones. Necesitamos una ecuación más, para lo cual tendremos que acudir a la ley de corrientes de Kirchoff. Al fijarnos en la fig.2.1.1, vemos que en el nudo A y en el nudo C, no tiene sentido aplicar la ley de corriente de Kirchoff, puesto que obtendríamos una identidad, luego sólo tiene sentido aplicarla en aquellos nudos donde lleguen por lo menos tres ramas, tales como los nudos B y D, pero sólo en uno de ellos podemos aplicar la ley de corrientes de Kirchoff (LCK) para obtener una ecuación independiente, veamos:

$$NB) \quad - i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (2.2.3)$$

Si Ud. aplica la LCK al nudo D obtendrá una ecuación que no es independiente.

Reescribiendo las tres ecuaciones obtenidas:

$$\begin{aligned} 10i_1 + 10i_2 &= 20 \\ - 10i_2 + 15i_3 &= 10 \\ - i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene:

$$i_1 = 1,5 \text{ A} \quad i_2 = 0,5 \text{ A} \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

Conocidos estos valores, usted puede encontrar tensiones y potencias en cualquiera de los elementos del circuito.

Consideremos otro ejemplo, como el mostrado en la Fig.2.2.1, donde aparece una fuente de corriente.

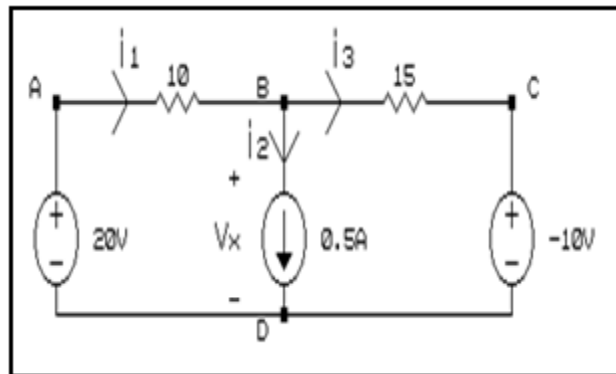


Figura2.2.1

En la fig.2.2.1, vemos que la corriente de rama $i_2 = 0,5 \text{ A}$ (no es desconocida), por lo tanto solo necesitamos el planteo de ecuaciones para hallar los valores de i_1 e i_3 . En el circuito se pueden identificar fácilmente dos mallas. Tratemos de usar la LTK para plantear una de las ecuaciones:

$$\text{M1)} \quad + 10i_1 + v_x - 20 = 0 \quad (2.2.4)$$

$$\text{M2)} \quad + 15i_3 - 10 - v_x = 0 \quad (2.2.5)$$

En estas ecuaciones de mallas, notamos que se ha introducido una incógnita adicional, que es la tensión v_x , en la fuente de corriente (recuerde que en las fuentes ideales de corriente se tiene un valor de corriente, es este caso $0,5 \text{ A}$, que es independiente del valor de tensión que se aplica a sus terminales). La tensión v_x no es conocida, y depende del resto de elementos interconectados a la fuente de corriente.

Si sumamos la ecuaciones (2.2.4) y (2.2.5) obtendremos la ecuación:

$$10i_1 + 15i_3 - 10 - 20 = 0 \quad (2.2.6)$$

La cual hubiéramos obtenido si planteamos la ecuación en la malla ABCDA, que no incluye a la fuente de corriente .

Lo anterior nos dice que si hay fuentes ideales de corriente en una malla de un circuito, y

queremos plantear ecuaciones de mallas en ella es necesario introducir como incógnita adicional la tensión v_x en los terminales de la fuente de corriente ideal.

Si queremos que no aparezcan estas incógnitas adicionales, debemos utilizar **mallas**, que no incluyan las fuentes ideales de corriente en su recorrido.

La ecuación adicional para la solución del problema se obtiene aplicando la LCK en el nudo B:

$$-i_1 + 0,5 + i_3 = 0$$

Reordenando las dos ecuaciones tenemos:

$$10i_1 + 15i_3 = 30$$

$$-i_1 + i_3 = -0,5$$

Al resolver estas dos ecuaciones se obtiene:

$$i_1 = 1,5 \text{ A} \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

Consideremos ahora el circuito de la fig.2.2.2 donde aparece una fuente de corriente controlada. Observe bien que la fuente controlada de la rama central es una fuente de corriente controlada por la tensión v_y . Tenga mucho cuidado de no confundirla con una fuente de tensión, la tensión v_x que aparece entre sus terminales es un valor desconocido.

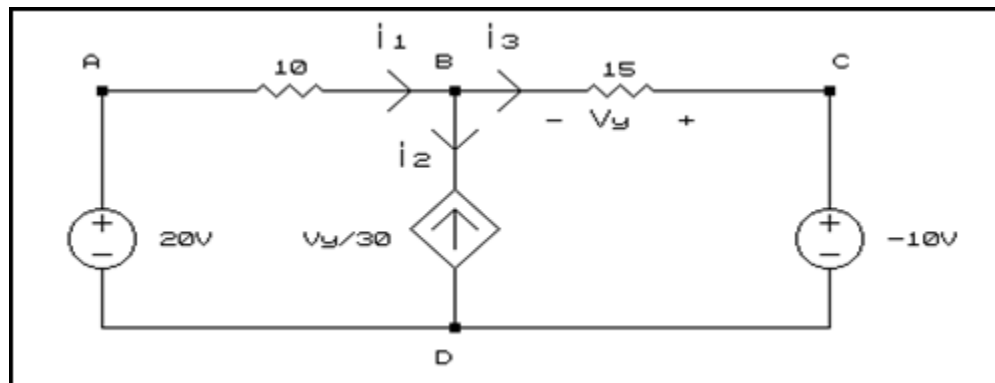


Figura 2.2.2

Al analizar el circuito y aplicar lo visto en los ejemplos anteriores tenemos:

$$i_2 = -\frac{1}{30} * v_y \quad (\text{fuente de corriente}) \quad (2.2.7)$$

Planteando una ecuación de malla que no incluya la fuente de corriente, obtenemos:

$$10i_1 + 15i_3 - 10 - 20 = 0$$

y finalmente aplicando la LCK en el nudo B:

$$-i_1 - \frac{1}{30} * v_y + i_3 = 0$$

Tenga presente que $(1/30 v_y)$ es una fuente de corriente, cuyas unidades son Ampére, no se deje confundir por el hecho de estar controlada por una tensión v_y , lo cual quiere decir que las unidades del término que acompaña a v_y , $1/30$, deben ser siemens.

Aparentemente hay una incógnita adicional que es v_y , pero aplicando la ley de Ohm, la podemos eliminar. Veamos

$$v_y = -15i_3 \quad (2.2.8)$$

(Por qué lleva signo negativo? Responda)

Eliminando v_y y reordenando las ecuaciones se obtiene:

$$i_2 - (1/2) i_3 = 0$$

$$-i_1 + (3/2) i_3 = 0$$

$$10i_1 + 15 i_3 = 30$$

Al resolver estas ecuaciones tenemos:

$$i_1 = 1,5 \text{ A} \quad i_2 = 0,5 \text{ A} \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

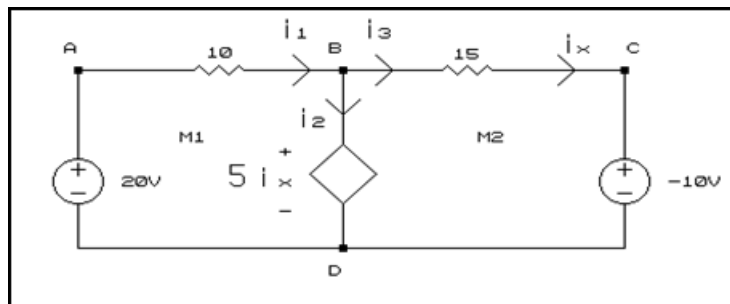


Figura2.2.3

Concluamos el estudio de este método analizando el circuito de la fig.2.2.3, donde aparece una fuente de tensión controlada por corriente.

Como no hay fuentes de corriente no debemos tener ningún problema al plantear las dos ecuaciones de malla:

$$\text{M1)} \quad 10i_1 + 5i_x - 20 = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\text{M2)} \quad 15i_3 - 10 - 5i_x = 0 \quad (2.2.10)$$

Usando la LCK, planteamos la tercera ecuación:

$$\text{NB)} \quad -i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (2.2.11)$$

Observemos que la corriente $i_x = i_3$ y que la fuente $5i_x$ es una fuente de tensión. Luego ordenando las ecuaciones tenemos:

$$10i_1 + 5i_3 = 20$$

$$+ 10i_3 = 10$$

$$-i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

Al resolverlas se tiene:

$$i_1 = 1,5 \text{ A} \quad i_2 = 0,5 \text{ A} \quad i_3 = 1 \text{ A}$$

Resumiendo, tenemos que los pasos a seguir cuando se usa el método de corrientes de rama son:

- 1) Asignar una corriente arbitraria a cada rama del circuito, entendiéndose por rama (en este caso) todos aquellos elementos interconectados en serie;
- 2) Usar la LTK, para plantear tantas ecuaciones como mallas tenga el circuito. Pero recuerde que si una de las mallas tiene una fuente ideal de corriente, debemos acudir a plantear una ecuación de malla que no incluya dicha fuente de corriente o simplemente tomar como corriente de malla, el valor de la fuente de corriente, cuando ésta se encuentre ubicada en una rama externa (rama periférica), esto es, una rama que no es común a varias mallas.
- 3) Usar la LCK, para plantear las ecuaciones que hacen falta para la solución del problema;
- 4) Resolver el conjunto de ecuaciones obtenido.

2.3 MÉTODO de MALLAS:

El método de corrientes de rama exige plantear, en general, un número grande de ecuaciones para el análisis de una red. El método de mallas disminuye el número de ecuaciones necesarias para dicho análisis. En la siguiente parte explicaremos como se logra esto.

Consideremos nuevamente el circuito de la fig.2.1.1, donde hay dos mallas perfectamente identificables: ABDA y BCDB que llamaremos malla 1 y malla 2 respectivamente.

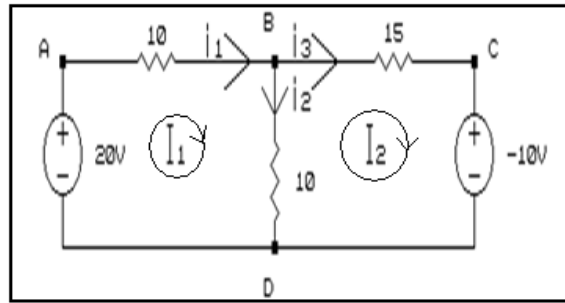


Figura2.3.1

A cada una de las mallas le asignaremos una corriente I_1 e I_2 , la cuales sugerimos que tengan siempre el mismo sentido (sentido de las agujas del reloj, en este caso) con el objeto de simplificar la sistematización del planteo de ecuaciones de malla. Como vemos hay una incógnita por cada una de las mallas del circuito, y de acuerdo a lo dicho anteriormente podemos usar la LTK para plantear tantas ecuaciones independientes como mallas tenga la red, lo cual quiere decir que en este método, no es necesario utilizar la LCK para plantear ecuaciones adicionales puesto que el número de incógnitas es igual al número de mallas "simples" de la red. Llamaremos malla "simple" a aquellos "huecos" de la red delimitados por las diferentes ramas, así como se muestra en la fig.2.3.1.

En algunas redes, estos "huecos" no son fácilmente identificables y tendremos que acudir a la topología de redes para saber el número de ecuaciones que es necesario plantear para resolver el problema.

Para resolver el problema de la fig.2.3.1, mediante el método de corrientes de rama, hemos necesitado asignar tres incógnitas (tres corrientes de rama). Si usamos el método de corrientes de mallas, sólo necesitamos asignar dos incógnitas (una corriente de malla, por cada "huevo" de la red). ¿Cómo se ha eliminado la tercera incógnita? Para responder esta pregunta concentrémosnos en el nudo B de la fig.2.3.1, tal como se muestra en la fig. 2.3.2.

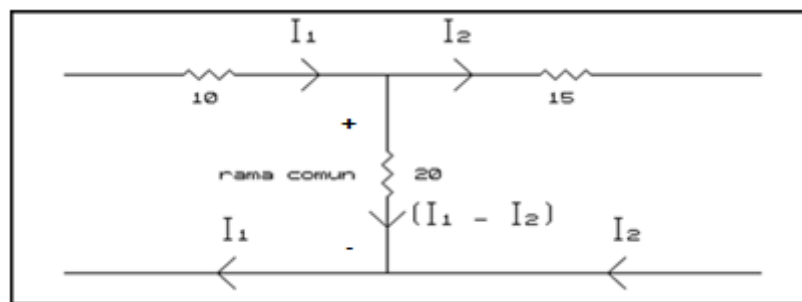


Figura2.3.2

En la rama común podemos averiguar la corriente que circula por ella aplicando la LCK, obteniéndose la corriente $I_1 - I_2$. Si comparamos con la asignación de corrientes de rama de la fig.2.1.1 tenemos la siguientes equivalencias

Tabla 2.3.1

corrientes de rama (Fig.2.1.1)	corrientes de malla (Fig.2.3.1)
i_1	I_1
i_2	$I_1 - I_2$
i_3	I_2

La Tabla 2.3.1, nos muestra que mediante la aplicación del método de corrientes de malla hemos eliminado la corriente de rama asignada a la rama común, esto lo hemos logrado mediante la aplicación implícita de la LCK.

El siguiente paso será plantear tantas ecuaciones de mallas como sea necesario; para hacer esto aplicamos la LTK, como sigue:

$$M1) \quad 10I_1 + 10(I_1 - I_2) - 20 = 0 \quad (2.3.1)$$

$$M2) \quad 15I_2 - 10(I_1 - I_2) - 10 = 0 \quad (2.3.2)$$

Para el planteo de estas ecuaciones hemos tenido en cuenta que por la rama común BD circula la corriente $I_1 - I_2$ con sentido de B a D, lo cual implica que la polaridad de la tensión en la rama común es tal como se muestra en la fig.2.3.2. Además como estamos recorriendo las mallas en el sentido de las agujas de reloj, la tensión de la rama común entrará con signo positivo en el planteo de la malla ABDA y entrará con signo negativo en el planteo de la malla BCDB.

Reescribiendo las ecuaciones (2.3.1), (2.3.2) y agrupando términos tenemos:

$$+(10 + 10)I_1 - 10I_2 - 20 = 0 \quad (2.3.3)$$

$$- 10I_1 + (15 + 10)I_2 - 10 = 0 \quad (2.3.4)$$

En las ecuaciones anteriores podemos observar lo siguiente:

- El coeficiente de I_1 en la ecuación (2.3.3) es igual a la suma de las resistencias presentes en la malla **1** y es positivo;
- El coeficiente de I_2 en la ecuación (2.3.4) es igual a la suma de las resistencias presentes en la malla **2** y es positivo también;
- El coeficiente de I_2 en la ecuación (2.3.3) y el de I_1 en la ecuación (2.3.4), es igual al valor de

la resistencia común a la malla **1** y la malla **2** y tienen signo negativo;

d) Los términos independientes de ambas ecuaciones corresponden a la suma de los valores de las fuentes independientes de tensión, cuyos signos dependerán del sentido en que se recorre la malla al plantear la LTK, en el caso en estudio ambos signos son negativos, puesto que al recorrer las mallas en el sentido de las agujas del reloj se entra por el terminal negativo de la fuente.

Finalmente las ecuaciones quedan así:

$$20I_1 - 10I_2 = 20$$

$$-10I_1 + 25I_2 = 10$$

Resultando $I_1 = 1,5 \text{ A}$ e $I_2 = 1 \text{ A}$

Consideremos ahora la red mostrada en la fig. 2.3.3. En ella podemos distinguir fácilmente tres "huecos", y por lo tanto asignaremos una corriente de malla a cada uno de ellos.

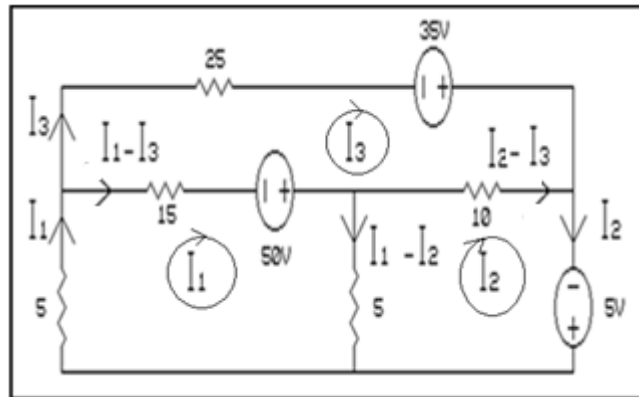


Figura 2.3.3

Note que asignamos el mismo sentido a las tres corrientes de malla (recuerde que esto lo seguiremos haciendo, con el objeto de sistematizar el planteamiento de las ecuaciones).

Necesitamos plantear tres ecuaciones, para lo cual utilizaremos la LTK.

La LCK sólo la utilizaremos en una forma implícita, para determinar las corrientes en las ramas comunes, tal como se muestra en la fig. 2.3.3. Allí podemos apreciar las corrientes de rama en función de las corrientes de malla (I_1 , I_2 e I_3). Esto sólo lo haremos en un comienzo, puesto que una vez "sistematicemos" el planteo de las ecuaciones no es necesario hacerlo.

De la fig. 2.3.3 al aplicar la LTK, tenemos:

$$M1) \quad 15(I_1 - I_3) - 50 + 5(I_1 - I_2) + 5I_1 = 0$$

$$M2) \quad +10(I_2 - I_3) - 5 - 5(I_1 - I_2) = 0$$

$$M3) \quad +25I_3 - 35 - 10(I_2 - I_3) + 50 - 15(I_1 - I_3) = 0$$

Note que en la aplicación de la LTK siempre hemos recorrido la malla en el sentido de las agujas del reloj. En este momento, Ud. debe estar en capacidad de entender la razón por la cual se les colocó el correspondiente signo positivo o negativo a cada uno de los términos que aparecen en las tres ecuaciones, si no es así regrese a la pág.12 donde se explican las Leyes de Kirchoff.

Reagrupando términos obtenemos:

$$(15 + 5 + 5)I_1 - 5I_2 - 15I_3 - 50 = 0$$

$$-5I_1 + (10 + 5)I_2 - 10I_3 - 5 = 0$$

$$-15I_1 - 10I_2 + (25 + 10 + 15)I_3 - 35 + 50 = 0$$

Nuevamente podemos hacer observaciones similares a las establecidas en el ejemplo anterior, con respecto a los coeficientes de las corrientes de malla.

Al resolver las ecuaciones se obtienen los resultados siguientes:

$$I_1 = 3 \text{ A}, I_2 = 2 \text{ A e } I_3 = 1 \text{ A}$$

Las observaciones anteriores nos sugieren una forma de "sistematizar" el planteo de ecuaciones de malla, para lo cual vamos a considerar tres tipos de circuitos:

a) Circuitos que sólo contienen resistencias y fuentes independientes de tensión;

b) Circuitos con resistencias y fuentes independientes y dependientes pero sólo de tensión;

c) Circuitos con resistencias, fuentes de tensión dependientes e independientes y fuentes de corriente que no son fácilmente transformables en fuentes de tensión. (En esta parte explicaremos como se transforman las fuentes reales de corriente en fuentes reales de tensión y viceversa).

Antes de entrar a estudiar cada uno de los casos por separado, veamos que es lo que nos sugieren las observaciones hechas al estudiar los circuitos de la fig.2.3.1 hasta la fig.2.3.3.

Lo primero que tenemos que tener presente es que si tenemos un circuito con n mallas,

tendremos n corrientes de mallas como incógnitas y será necesario plantear n ecuaciones. Estas n ecuaciones tendrán la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 M1) \quad & R_{11}I_1 + R_{12}I_2 \dots + R_{1n}I_n + \Sigma v_1 = 0 \\
 M2) \quad & +R_{21}I_1 + R_{22}I_2 \dots + R_{2n}I_n + \Sigma v_2 = 0 \\
 & \cdot \\
 & \cdot \\
 Mi) \quad & +R_{i1}I_1 + R_{i2}I_2 \dots + R_{ij}I_j \dots + R_{in}I_n + \Sigma v_i = 0 \\
 Mn) \quad & +R_{n1}I_1 + R_{n2}I_2 \dots + R_{nn}I_n + \Sigma v_n = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.5}$$

donde:

R_{ii} = Suma aritmética de todas las resistencias R_j que encontramos en el recorrido de la malla i .
(Siempre $R_{ii} > 0$)

R_{ij} = Suma de todas las resistencias comunes entre la malla i y la malla j . Este coeficiente se debe multiplicar por (-1) cuando las corrientes I_i e I_j recorran la resistencia común R_{ij} en sentidos contrarios.

Σv_i = Suma algebraica de todas las fuentes de tensión, de la malla i . Recuerde que se les asignan signos positivos, a aquellas fuentes donde se entre por el terminal positivo en el recorrido de la malla, y se les asignan signos negativos si se entra por el terminal negativo.

Recuerde que para que los términos R_{ij} , sean todos negativos, es necesario elegir todas las corrientes de malla en el mismo sentido, consideremos por ejemplo el circuito de la fig. 2.3.4, donde no hemos seguido esta norma:

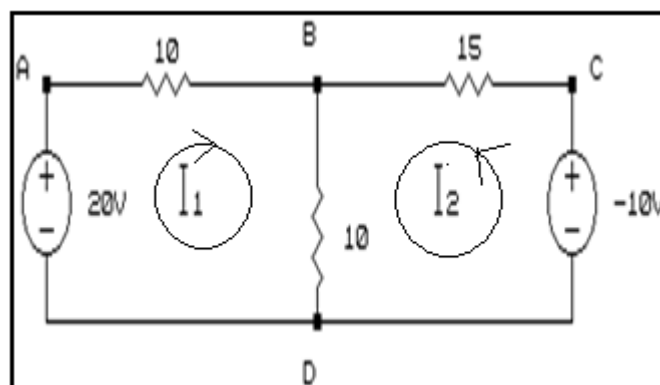


Figura 2.3.4

La corriente I_1 tiene el sentido de las agujas del reloj y la corriente I_2 tiene el sentido contrario, luego al plantear las ecuaciones tenemos:

$$+(10 + 10)I_1 + 10I_2 - 20 = 0$$

$$+ 10I_1 + (15 + 10)I_2 + 10 = 0$$

De donde podemos observar que el término R_{ij} no es negativo, lo cual sí se hubiera cumplido si hubiéramos elegido ambas corrientes en el mismo sentido. Como Usted puede ver esto complicaría la sistematización, puesto que si no elegimos todas las corrientes en el mismo sentido, tendríamos que en algunas ocasiones R_{ij} sería negativo y en otras sería positivo.

Ahora sí, estudiemos la sistematización para cada uno de los casos:

Caso a: Aquellos circuitos que sólo contienen resistencias y fuentes independientes de tensión es donde se hace más fácil la sistematización. Consideremos por ejemplo el circuito de la fig.2.3.5.

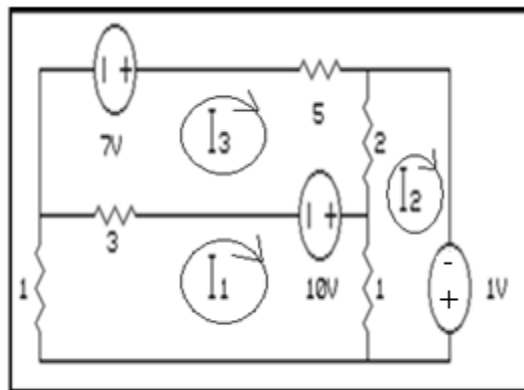


Figura2.3.5

El procedimiento a seguir será:

- 1) Asignar una corriente de malla a cada uno de los "huecos" (todas deben tener el mismo sentido);
- 2) Usar la LTK para plantear tantas ecuaciones como corrientes de malla se hayan elegido, recordando que las ecuaciones tendrán la forma de las ecuaciones (2.3.5);
- 3) Resolver el sistema de ecuaciones obtenido.

Aplicando este procedimiento al circuito de la fig. 2.3.5, tenemos:

Se asignarán las corrientes I_1 , I_2 e I_3 (todas con el sentido de las agujas del reloj) y se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$M1) \quad (1 + 3 + 1)I_1 - 1I_2 - 3I_3 - 10 = 0 \tag{2.3.6}$$

Observe que el coeficiente de I_1 es R_{11} , esto es, la suma de todas las resistencias de la malla 1.

El coeficiente de I_2 es R_{12} , que corresponde a la suma de las resistencias comunes a las mallas 1 y 2 (1Ω en este caso). El coeficiente de I_3 es R_{13} , que corresponde a la suma de las resistencias comunes entre las mallas 1 y 3 (3Ω en este caso). También debemos observar que al recorrer la malla en el sentido de las agujas del reloj la fuente de $10V$ entra con signo negativo en la ecuación de la malla 1.

Así sucesivamente podemos plantear en forma sistemática las ecuaciones correspondientes a las mallas 2 y 3 obteniendo:

$$M2) \quad -1I_1 + (1+2)I_2 - 2I_3 - 1 = 0 \quad (2.3.7)$$

$$M3) \quad -3I_1 - 2I_2 + (5+2+3)I_3 - 7 + 10 = 0 \quad (2.3.8)$$

Observe claramente, que al plantear la malla 2 el término que acompaña a I_2 es R_{22} y el término que acompaña a I_3 en el planteo de la malla 3 es R_{33} , los cuales serán siempre positivos. Los coeficientes negativos que aparecen corresponden siempre a las respectivas resistencias comunes.

Re-escribiendo las ecuaciones tenemos:

$$5I_1 - 1I_2 - 3I_3 = 10 \quad (2.3.9)$$

$$-1I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 1 \quad (2.3.10)$$

$$-3I_1 - 2I_2 + 10I_3 = -3 \quad (2.3.11)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos:

$$I_1 = 3 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

Nota: Si no hay fuentes controladas se tiene que cumplir que $R_{ij} = R_{ji}$, lo cual se observa en las ecuaciones anteriores.

$$R_{12} = R_{21} = -1$$

$$R_{13} = R_{31} = -3$$

$$R_{23} = R_{32} = -2$$

Caso b) Circuitos con resistencias y fuentes de tensión tanto dependientes (controladas) como independientes.

Consideremos el circuito de la fig. 2.3.6, donde aparece una fuente de tensión controlada por la

tensión v_x .

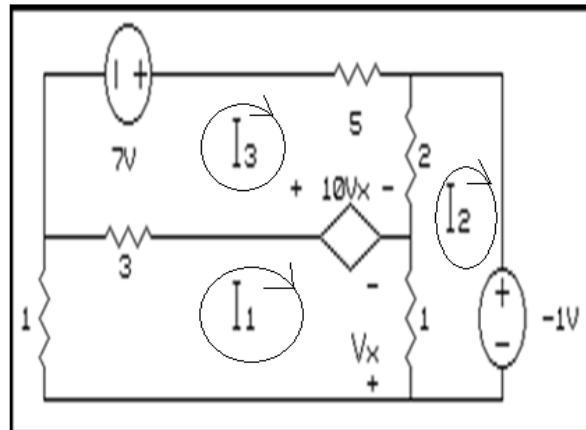


Figura 2.3.6

El procedimiento a seguir es el mismo que en el caso **a**, pero debemos tener especial cuidado cuando entremos en las ecuaciones, el término correspondiente a la fuente controlada. Las ecuaciones son:

$$M1) \quad 5I_1 - 1I_2 - 3I_3 + 10v_x = 0$$

$$M2) \quad -1I_1 + 3I_2 - 2I_3 - 1 = 0 \quad (2.3.12)$$

$$M3) \quad -3I_1 - 2I_2 + 10I_3 - 7 - 10v_x = 0$$

En el sistema anterior, podemos ver que la fuente controlada la hemos entrado, considerándola como una fuente de tensión cualquiera, pero para poder resolver el sistema de ecuaciones es necesario hallar el valor de v_x en función de las corrientes de malla (I_1 , I_2 e I_3), que son las incógnitas del circuito. Para hacer esto basta con aplicar la ley de Ohm en la resistencia donde aparece la tensión de control v_x ; en la fig. 2.3.6 vemos que la corriente que fluye en esta resistencia de abajo hacia arriba es $(I_2 - I_1)$, luego:

$$v_x = 1(I_2 - I_1)$$

Al remplazar este valor en las ecuaciones (2.3.12), se tiene:

$$5I_1 - 1I_2 - 3I_3 + 10(I_2 - I_1) = 0$$

$$-1I_1 + 3I_2 - 2I_3 - 1 = 0$$

$$-3I_1 - 2I_2 + 10I_3 - 7 - 10(I_2 - I_1) = 0$$

Y al juntar términos semejantes, tenemos:

$$- 5I_1 + 9I_2 - 3I_3 = 0$$

$$- I_1 + 3I_2 - 2I_3 = 1$$

$$+ 7I_1 - 12I_2 + 10I_3 = 7$$

En este sistema de ecuaciones se puede ver que los términos R_{ij} en general son diferentes de R_{ji} , debido a la presencia de la fuente controlada.

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene

$$I_1 = 3 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A} \quad \text{e} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

Consideremos ahora el circuito de la figura 2.3.7, donde aparecen fuentes de corriente y fuentes de tensión. Observando el circuito, vemos que las fuentes de corriente están en paralelo con una resistencia, este conjunto es lo que se llama una fuente real de corriente y se puede transformar en una fuente real de tensión, como vamos a explicar a continuación. Al hacer este tipo de transformación, el circuito se convierte en un circuito del caso **a**.

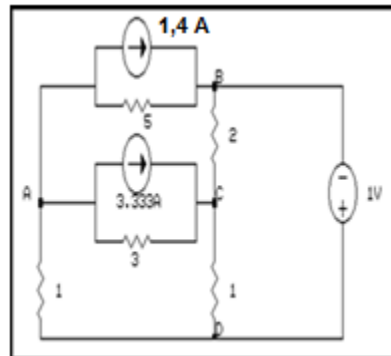


Figura2.3.7

Antes de seguir con los circuitos del caso **c**, expliquemos **LA TRANSFORMACION DE FUENTES REALES**.

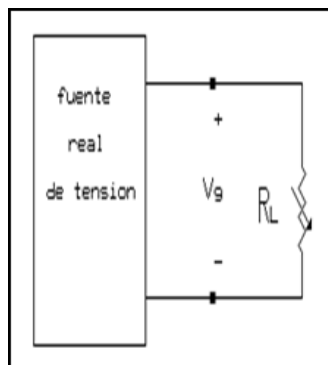
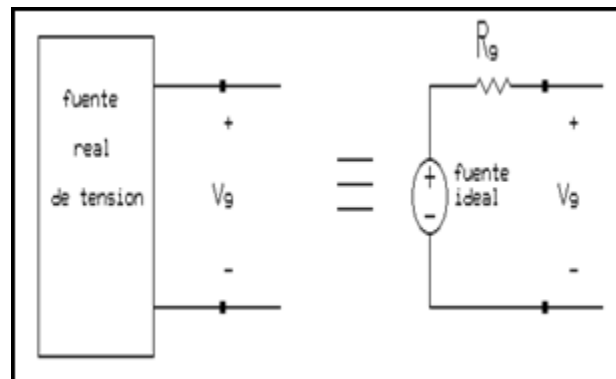
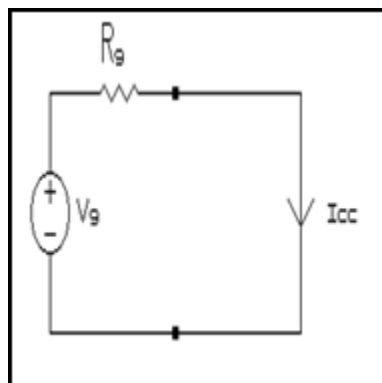


Figura2.3.8

Hasta ahora hemos considerado las fuentes, como elementos ideales, así por ejemplo, la fuente ideal de tensión mantiene entre sus terminales la misma tensión, independiente del valor de corriente que por ella circule, lo cual implica que este elemento activo es capaz de entregar un valor infinito de potencia. Pero en la realidad nos vamos a encontrar que esto no es posible, y vamos a hallar que el valor de tensión que aparece entre los extremos de una fuente real varía, al variar el valor de la carga aplicada, por ejemplo, al variar R_L en la fig. 2.3.8, el valor de V_g no se mantiene constante, luego un modelo que se aproxima a la realidad, para una fuente de tensión es el mostrado en la fig. 2.3.9.

**Figura2.3.9**

Allí vemos la fuente real de tensión representada por una fuente ideal de tensión y una resistencia R_g (llamada resistencia interna de la fuente). Bajo estas condiciones vemos que es imposible lograr que la fuente entregue una cantidad infinita de potencia, puesto que la máxima corriente que se puede obtener corresponde a la corriente de cortocircuito I_{cc} y además la tensión de salida es función de la carga R_L .

**Figura2.3.10**

Una explicación análoga encontraremos con las fuentes ideales de corriente, donde un modelo que se aproxima más a la realidad, está representado por una fuente ideal de corriente y una resistencia en paralelo con ella, llamada resistencia interna de la fuente, tal como lo muestra la

fig.2.3.11.

El valor de la corriente I_g proveniente de la fuente real de corriente, no es constante y además dicha fuente es incapaz de entregar una cantidad infinita de potencia, puesto que la máxima tensión de salida de la fuente corresponde a a la tensión de circuito abierto V_{ca} , que ocurre cuando R_L tiende a infinito.

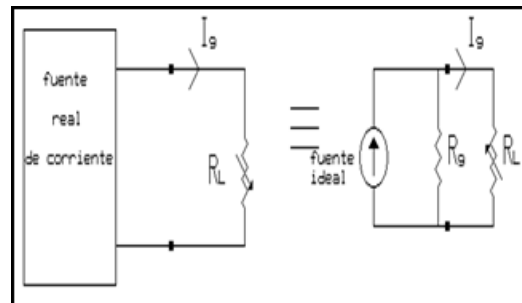


Figura2.3.11

Habiendo introducido el concepto de fuentes reales de tensión y corriente, veamos ahora como es posible hallar para cada fuente real de tensión un circuito equivalente que consiste en una fuente real de corriente y viceversa. Consideremos los circuitos representados en la fig. 2.3.12.

En ellos aparece una carga R_L , excitada por una fuente real de tensión que es equivalente a la misma carga R_L excitada por una fuente de real de corriente tal como se muestra en la fig.2.3.12. Para que ambos circuitos sea equivalentes es necesario que V_L e I_L sobre la carga R_L sean exactamente iguales, esto implica que deben existir ciertas relaciones entre V_g , I_g y R_g tal como lo vamos a demostrar a continuación.

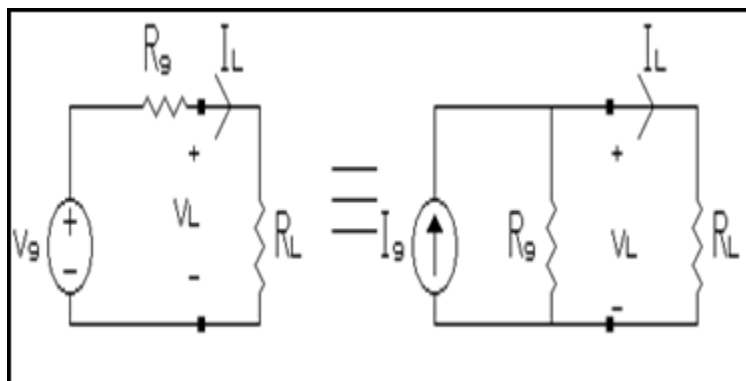


Figura2.3.12

Calculemos I_L y V_L en cada uno de los circuitos de la fig. 2.3.12.

En el circuito de la parte izquierda de la fig.2.3.12 tenemos:

$$V_L = V_G \frac{R_L}{R_L + R_G} \quad I_L = \frac{V_L}{R_L} = \frac{V_G}{R_L + R_G} \quad (2.3.13)$$

Y en el circuito de la parte derecha de la fig. 2.3.12 tenemos:

$$I_L = I_G \frac{R_G}{R_L + R_G} \quad V_L = I_L R_L = I_G \frac{R_L R_G}{R_L + R_G} \quad (2.3.14)$$

Comparando las ecuaciones tenemos que para que sean equivalentes los circuitos de la fig.2.3.12 se debe cumplir que:

$$V_g = I_g R_g \quad (2.3.15)$$

La ecuación hallada será la que nos ayudará a transformar una fuente real de tensión (V_g, R_g) en una fuente real de corriente (I_g, R_g) o viceversa, tal como se muestra en la fig. 2.3.13 y fig. 2.3.14.

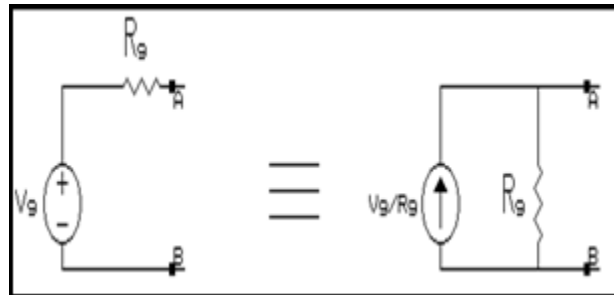


Figura2.3.13

Observe que el terminal positivo de la fuente de tensión y la punta de la flecha que indica el sentido de la fuente de corriente están dirigidos hacia el nudo A, esto siempre debe ser así para que las dos fuentes sean equivalentes.

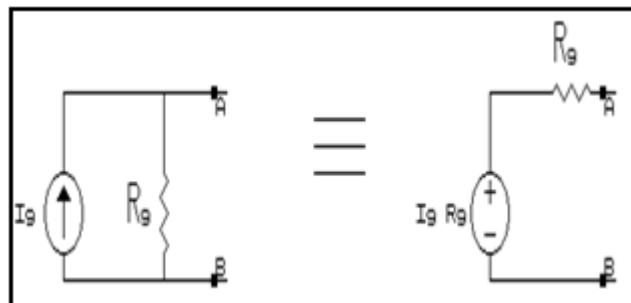


Figura2.3.14

Regresando al circuito mostrado en la fig. 2.3.7 vemos que ambas fuentes de corriente tienen una resistencia en paralelo, y por lo tanto las podemos considerar como fuentes reales de corriente, las cuales pueden transformarse en fuentes reales de tensión aplicando la relación de transformación (2.3.15), se obtiene:

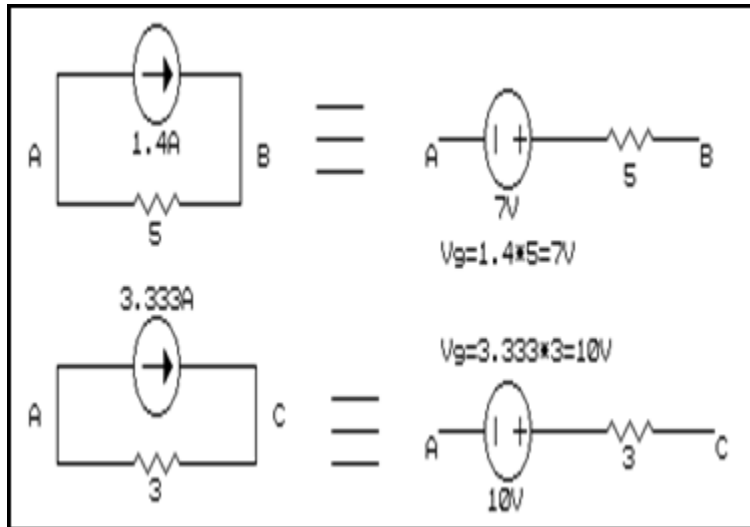


Figura2.3.15

La flecha en la fig.2.3.15 apunta hacia el nudo B y por lo tanto el terminal positivo de la fuente real equivalente de tensión debe también estar hacia B. Al transformar las fuentes reales de corriente en fuentes reales de tensión, el circuito queda como el que se muestra en la fig.2.3.16.

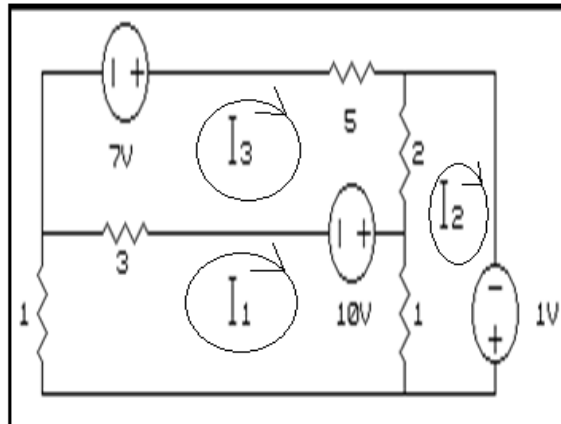


Figura2.3.16

Y utilizando el método de mallas (método sistemático) obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$5I_1 - I_2 - 3I_3 - 10 = 0$$

$$-I_1 + 3I_2 - 2I_3 - 1 = 0$$

$$-3I_1 - 2I_2 + 10I_3 + 3 = 0$$

Dando los resultados siguientes:

$$I_1 = 3 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A} \quad \text{e} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

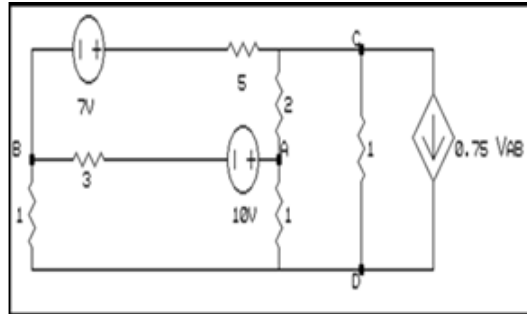


Figura 2.3.17

Consideremos otro circuito como el mostrado en la figura 2.3.17. En dicho circuito podemos apreciar la existencia de una fuente controlada de corriente, la cual está en paralelo con una resistencia de 1Ω y por lo tanto se puede transformar en una fuente controlada de tensión, tal como se muestra en la fig.2.3.18.

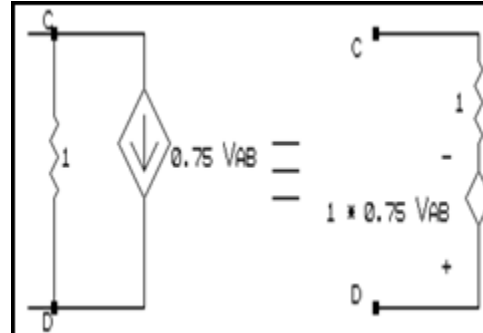


Figura 2.3.18

Recuerde siempre que la punta de la flecha de la fuente de corriente y el terminal positivo de la fuente de tensión están siempre hacia el mismo nudo. Después de hacer esta transformación el circuito queda tal como se muestra en la fig.2.3.19; equivalente a un circuito del **caso b**.

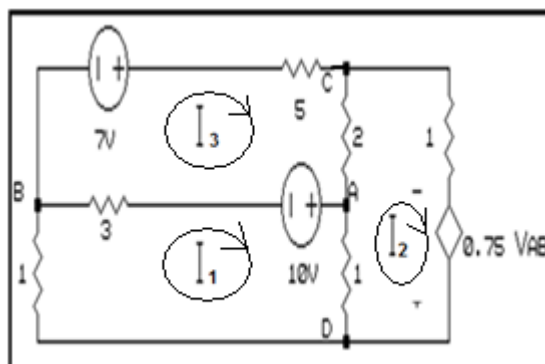


Figura 2.3.19

Procediendo luego a plantear las ecuaciones, tenemos:

$$\text{Malla 1 } 5I_1 - 1I_2 - 3I_3 - 10 = 0$$

$$\text{Malla 2 } -1I_1 + 4I_2 - 2I_3 - 0,75 v_{AB} = 0 \quad (2.3.16)$$

$$\text{Malla 3 } -3I_1 - 2I_2 + 10I_3 + 3 = 0$$

Debido a la presencia de la fuente controlada, aparece una incógnita adicional: v_{AB} , la cual debemos expresar en función de las corrientes de malla I_1 , I_2 e I_3 . Para hacer esto, dibujemos aparte la rama AB del circuito tal como se muestra en la fig. 2.3.20.

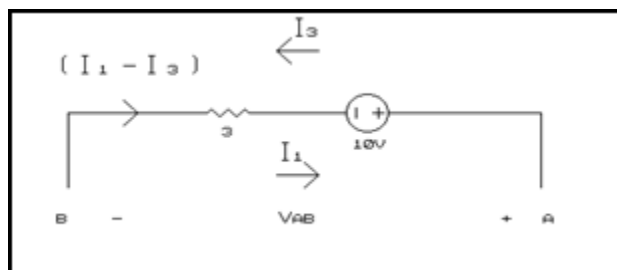


Figura 2.3.20

Para determinar v_{AB} , podemos imaginarnos una malla ficticia con una fuente de tensión v_{AB} ; y al aplicar la LTK se tiene:

$$+ 3 (I_1 - I_3) - 10 + v_{AB} = 0$$

$$\therefore v_{AB} = 10 - 3(I_1 - I_3) = 10 - 3I_1 + 3I_3 \quad (2.3.17)$$

Obteniendo así v_{AB} en función de las corrientes de malla. Reemplazando este valor en el sistema de ecuaciones (2.3.16), tenemos:

$$5I_1 - I_2 - 3I_3 = 10$$

$$+ 1,25 I_1 + 4I_2 - 4,25 I_3 = 7,5 \quad (2.3.18)$$

$$-3I_1 - 2I_2 + 10I_3 = -3$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que :

$$I_1 = 3 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

En el sistema de ecuaciones (2.3.18) podemos observar que los coeficientes R_{ij} son en algunos casos diferentes de R_{ji} , lo cual se debe a la presencia de una fuente controlada.

Antes de pasar al caso **c**, veamos algunos detalles que tenemos que tener en cuenta cuando transformemos fuentes controladas de corriente en fuentes controladas de tensión y viceversa.

Por ejemplo consideremos el circuito de la fig. 2.3.21.

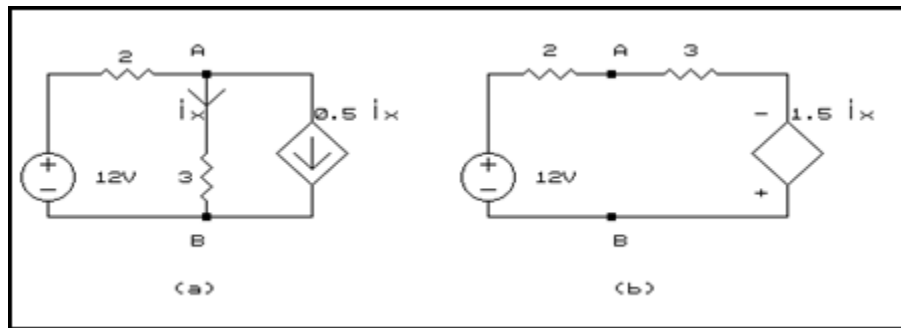


Figura 2.3.21

Al transformar el circuito de la fig.2.3.21a en el 2.3.21b, vemos que se ha perdido la variable que controla la fuente controlada de tensión. Cuando ocurre esto, tenemos que tener mucho cuidado con la transformación de las fuentes. Por ejemplo, en este caso, podemos cambiar la variable de control, sabiendo que:

$$V_{AB} = 3i_x \quad \therefore \quad i_x = \frac{V_{AB}}{3}$$

luego podemos obtener los circuitos siguientes:

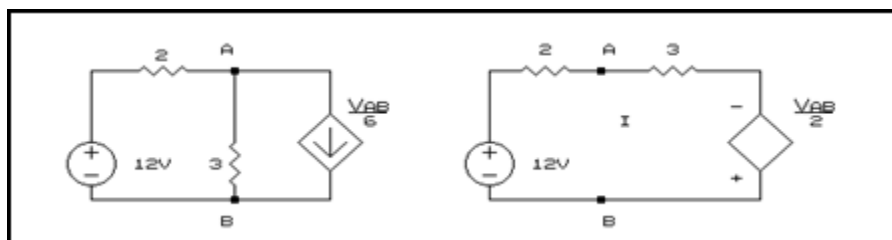


Figura 2.3.22

Al plantear la ecuación de la malla, tenemos:

$$5I - \frac{3}{6} v_{AB} - 12 = 0 \quad (2.3.19)$$

Pero $-v_{AB} + 3I - \frac{3}{2} \frac{v_{AB}}{3} = 0$

o también $+v_{AB} - 12 + 2I = 0$

luego $\frac{3}{2} v_{AB} = 3I \quad \therefore \quad v_{AB} = 2I$

Al remplazar este valor en la ecuación (2.3.19), tenemos:

$$5I - \frac{1}{2} (2I) = 12$$

$$4I = 12 \quad \therefore \quad I = 3A$$

$$v_{AB} = 2I = 6V$$

Caso C: En esta parte estudiaremos el planteo de ecuaciones de mallas en circuitos con resistencias, fuentes de tensión tanto controladas como independientes y fuentes de corriente que no son fácilmente transformables en fuentes de tensión. Consideremos el circuito de la fig. 2.3.23, donde aparece una fuente de corriente que no está en paralelo con una resistencia y por lo tanto no es fácilmente transformable en una fuente de tensión.

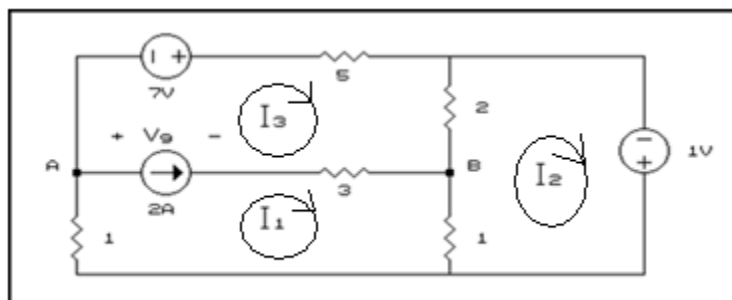


Figura 2.3.23

Si queremos resolver el circuito de la figura 2.3.23, utilizando el método de mallas, lo primero que debemos hacer es asignar corrientes de malla a cada uno de los "huecos" del circuito, en este caso tres. A todas las corrientes se les asignó el mismo sentido, tal como lo hemos venido recomendando. Intentemos plantear las ecuaciones de mallas, empecemos por la malla 1:

$$(3 + 1 + 1)I_1 - 1I_2 - 3I_3 + v_g = 0 \quad (2.3.20)$$

Notemos que se ha introducido una incógnita adicional en esta ecuación: v_g (tensión entre los extremos de la fuente de corriente). Esto tiene que ser así, puesto que cuando planteamos la ecuaciones de mallas estamos usando la LTK, esto es, estamos sumando las tensiones en una malla, pero cuando llegamos a la fuente de corriente, sabemos que se conoce el valor de la corriente que ella suministra al circuito, pero no conocemos la tensión entre sus extremos. Tenga

muy presente esta observación en estos circuitos.

Planteemos ahora la ecuación correspondiente a la malla 2:

$$- I_1 + 3I_2 - 2I_3 - 1 = 0$$

En esta malla no aparecía ninguna fuente de corriente, luego su planteo se hizo en la forma sistemática conocida.

En la malla 3 tenemos:

$$- 3I_1 - 2I_2 + 10I_3 - 7 - v_g = 0 \quad (2.3.21)$$

Donde nuevamente aparece la incógnita v_g . Hasta ahora hemos planteado 3 ecuaciones, pero debido a que hay una fuente de corriente en el circuito, cuya tensión v_g es desconocida, tenemos un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas, luego es necesario plantear una ecuación adicional. Para el planteo de esta ecuación adicional acudimos a la fuente de corriente existente en la rama AB tal como se muestra en la fig. 2.3.24.

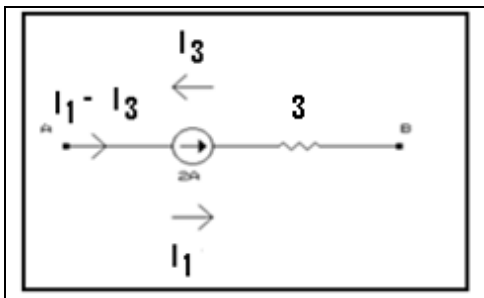


Figura 2.3.24

Aquí vemos que, de acuerdo a la definición de fuente de corriente, la corriente en dicha rama tiene que ser igual al valor de la fuente de corriente, esto es:

$$I_1 - I_3 = 2$$

Esta sería la cuarta ecuación, para obtener un sistema de 4 ecuaciones independientes con 4 incógnitas. Como vemos, no obstante que el circuito tiene sólo tres mallas hemos tenido que plantear 4 ecuaciones, puesto que fue necesario agregar una incógnita adicional. Esto implica, desde el punto de vista matemático, más trabajo.

Si nosotros elimináramos de las ecuaciones (2.3.20) y (2.3.21) la incógnita v_g , obtendríamos tres ecuaciones independientes donde las incógnitas serían las tres corrientes de malla. Reescribiendo y sumando estas dos ecuaciones tenemos:

$$5I_1 - 1I_2 - 3I_3 + v_g = 0$$

$$- 3I_1 - 2I_2 + 10I_3 - v_g - 7 = 0$$

$$2I_1 - 3I_2 + 7I_3 - 7 = 0$$

Las otras 2 ecuaciones serán:

$$- I_1 + 3I_2 - 2I_3 - 1 = 0$$

$$e \quad I_1 - I_3 = 2$$

Al resolver estas tres ecuaciones tenemos:

$$I_1 = 3 \text{ A}, \quad I_2 = 2 \text{ A}, \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

La solución que le hemos dado al problema anterior nos permite sugerir el siguiente procedimiento, cuando queramos analizar circuitos del caso C:

1. Asignar una corriente de malla para cada uno de los "huecos" de la red (asígneles a todas el mismo sentido)
2. Asigne también como incógnitas, las tensiones en cada una de las fuentes de corriente (colóqueles una polaridad cualquiera).
3. Plantee tantas ecuaciones de malla como corrientes de malla haya asignado al circuito (hágalo usando el método sistemático). Si la malla incluye una fuente de corriente que no esté en una rama común a otras mallas, no es necesario plantear esta ecuación, puesto que automáticamente se conoce esta corriente de malla (esto lo explicaremos con un ejemplo).
4. Elimine las tensiones de las fuentes de corriente, que aparecen como incógnitas, sumando las ecuaciones apropiadas.
5. Por cada fuente de corriente que exista es necesario plantear una ecuación adicional, sabiendo que las fuentes de corriente fuerzan la existencia de una cierta relación de los valores de estas con las corrientes de mallas.
6. Resuelva el sistema de ecuaciones.

Con el objeto de explicar la aplicación de este método consideremos el circuito de la fig. 2.3.25.

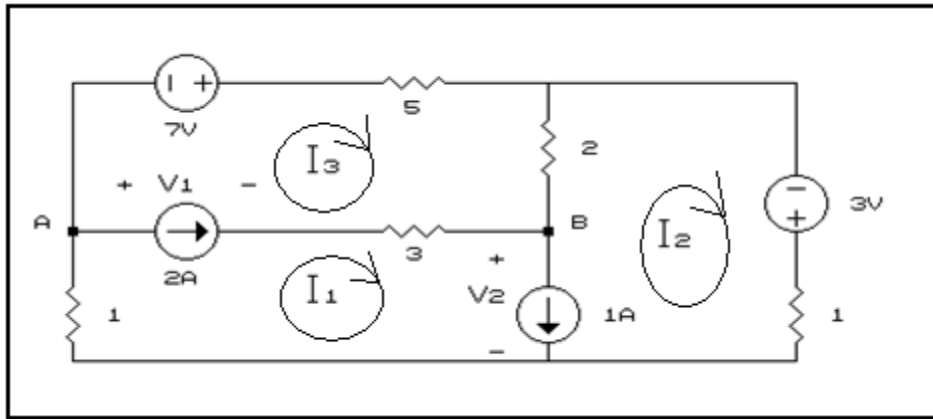


Figura2.3.25

En la fig. 2.3.25 se muestra la asignación de las corrientes de malla y las tensiones en las fuentes de corriente, luego el siguiente paso es el planteo de las tres ecuaciones de mallas:

$$M1) \quad 4I_1 - 0I_2 - 3I_3 + v_1 + v_2 = 0$$

$$M2) \quad -0I_1 + 3I_2 - 2I_3 - v_2 - 3 = 0$$

$$M3) \quad -3I_1 - 2I_2 + 10I_3 - v_1 - 7 = 0$$

Como hay 2 fuentes de corriente, esto es, dos incógnitas adicionales: v_1 y v_2 ; debemos eliminar 2 incógnitas y quedará una sola ecuación. En este caso, la eliminación de v_1 y v_2 se logra sumando las tres ecuaciones quedando:

$$I_1 + I_2 + 5I_3 - 10 = 0$$

Ahora tendremos que plantear una ecuación adicional por cada fuente de corriente que exista. Redibujemos las ramas donde hay fuentes de corriente, tal como se muestra en la fig. 2.3.26.

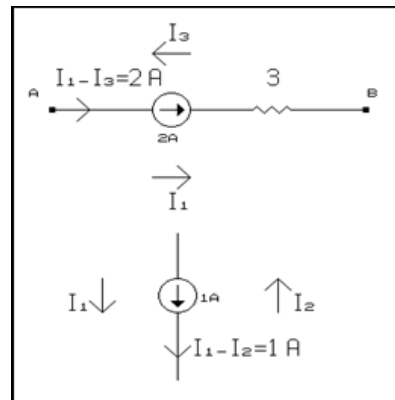


Figura2.3.26

Observando las corrientes de rama en función de las corrientes de malla, obtenemos las 2 ecuaciones adicionales.

$$I_1 - I_3 = 2$$

$$I_1 - I_2 = 1$$

Al resolver estas tres ecuaciones, se tiene:

$$I_1 = 3 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A} \quad \text{e} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

Antes de abandonar este ejemplo miremos la resistencia de 3Ω que está en serie, con la fuente de corriente de 2 A . ¿Qué pasaría si agregamos en serie a esta rama otra resistencia de 1000Ω ? Para responder a esta pregunta sugerimos que resuelva de nuevo el problema con este valor adicional de resistencia y Usted verá que los valores de las corrientes de malla van a resultar exactamente iguales. Resultado sorprendente ¡verdad! Usted se preguntará; ¿Sí el circuito cambió, porque no cambiaron las variables? La respuesta será la siguiente: Si sigue el método sugerido va a encontrar que las ecuaciones encontradas para hallar las corrientes de mallas son exactamente iguales; en cambio, si quiere calcular el valor de v_1 (tensión en la fuente de corriente de 2 A) va a encontrar valores diferentes. Esto ocurre puesto que cualquier elemento (a excepción de una fuente de corriente de valor diferente) conectado en serie a una fuente de corriente no puede alterar el valor de la corriente de la rama. Las ramas conectadas en serie a las fuentes de corriente las llamaremos **ramas independientes**, puesto que la tensión, corriente y potencia que aparecen en ellas son independientes del resto del circuito. Así por ejemplo en la resistencia de 3Ω de la fig. 2.3.26, vemos que

$$i_{3\Omega} = 2 \text{ A} \quad v_{3\Omega} = 2 * 3 = 6 \text{ V} \quad P_{3\Omega} = 12 \text{ W}$$

Estos valores pueden calcularse sin necesidad de hallar las corrientes de mallas en el circuito.

Para profundizar un poco más en el concepto de ramas independientes, analicemos el circuito sencillo de la fig.2.3.27.

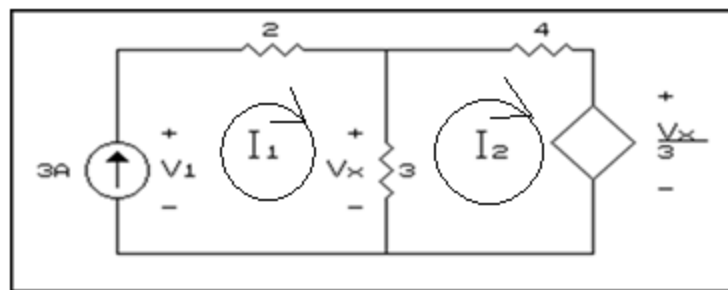


Figura 2.3.27

En este circuito, la resistencia de 2Ω , es una rama independiente, puesto que podemos calcular el valor de su tensión, corriente y potencia sin saber lo que ocurre en el resto de la red, así:

$$V_{2\Omega} = 6 \text{ V} \quad i_{2\Omega} = 3 \text{ A} \quad P_{3\Omega} = 18 \text{ W}$$

Para analizar este circuito no es necesario plantear la ecuación de la malla 1, puesto que la fuente de corriente no está en una rama común a las otras mallas, y por lo tanto vemos que:

$$I_1 = 3 \text{ A}$$

En la malla 2, se tiene:

$$-3 I_1 + 7I_2 + \frac{1}{3} v_x = 0 \quad (2.3.23)$$

donde $I_1 = 3 \text{ A}$ y $v_x = 3(I_1 - I_2) = 3(3 - I_2)$

al remplazar estos valores en la ecuación (2.3.23), tenemos

$$-9 + 7I_2 + \frac{1}{3} * 3(3 - I_2) = 0$$

$$6I_2 = 6 \quad \therefore \quad I_2 = 1 \text{ A}$$

Calculemos ahora el valor de la tensión v_1 en la fuente de corriente:

$$\text{Malla 1} \quad 5I_1 - 3I_2 = v_1$$

$$\therefore \quad v_1 = 5 * 3 - 3 * 1 = 12 \text{ V}$$

Supongamos ahora que cambiamos la resistencia de 2Ω por una de 10Ω , como en la fig.2.3.28.

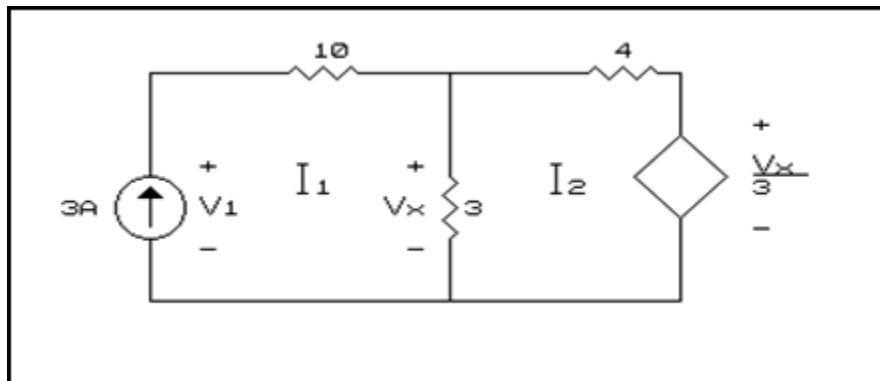


Figura2.3.28

Nuevamente vemos que los valores de la corriente, potencia y tensión en la rama independiente no dependen del resto del circuito.

$$i_{10\Omega} = I_1 = 3 \text{ A} \quad v_{10\Omega} = 30 \text{ V} \quad P_{10\Omega} = 90 \text{ W}$$

Al analizar el circuito tenemos:

$$I_1 = 3 \text{ A}$$

$$-3 I_1 + 7I_2 + \frac{1}{3} v_x = 0$$

Las ecuaciones son idénticas y por lo tanto los valores de las corrientes de mallas son las mismas, lo único que varía es el valor de la tensión v_1 ,

$$v_1 = 13I_1 - 3I_2$$

$$v_1 = 13 * 3 - 3 * 1 = 36\text{V}$$

Es lógico que aumente la tensión en la fuente de corriente, puesto que en el circuito de la fig. 2.3.28, tiene que suministrar más potencia, por ser la resistencia de la rama mayor.

Antes de iniciar el estudio de otros métodos consideremos otro circuito, como el mostrado en la fig. 2.3.29.

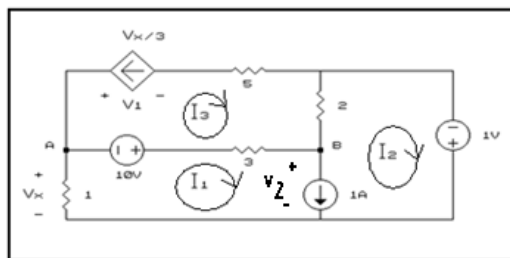


Figura 2.3.29

En la fig. 2.3.29, aparecen ya asignadas las corrientes de malla y las tensiones en las fuentes de corriente. Observe bien que la fuente controlada es de corriente y no de tensión. También tenemos que observar que las fuentes de corriente están: una, en la rama común a las mallas 1 y 2 y la otra (la fuente controlada de corriente), está en una rama que no es común a 2 mallas.

Siguiendo el método expuesto para el análisis de este tipo de circuitos tenemos:

$$M1) \quad 4I_1 - 0I_2 - 3I_3 - 10 + v_2 = 0$$

(2.3.24)

$$M2) \quad 0I_1 + 2I_2 - 2I_3 - 1 - v_2 = 0$$

La ecuación correspondiente a la malla 3, no hace falta plantearla puesto que incluye una fuente de corriente en una rama que no es común a las otras mallas, y por lo tanto fija de una vez el valor de la corriente en dicha malla, esto es:

$$I_3 = -\frac{1}{3} v_x$$

Al sumar las ecuaciones de las mallas 1 y 2, podemos eliminar v_2 , quedando:

$$4I_1 + 2I_2 - 5I_3 - 11 = 0$$

Sólo nos queda plantear una ecuación correspondiente a la fuente de corriente de 1A, la cual está en la rama común de las mallas 1 y 2, donde tenemos que:

$$I_1 - I_2 = 1$$

Debido a la presencia de una fuente controlada, tendremos que hallar una relación entre v_x (tensión de control) y las corrientes de malla

$$v_x = -I_1 * 1$$

Al remplazar estos valores obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$4I_1 + 2I_2 - 5I_3 = 11$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}I_1 + I_3 &= 0 \\ I_1 - I_2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema tenemos:

$$I_1 = 3 \text{ A} \quad I_2 = 2 \text{ A} \quad I_3 = 1 \text{ A}$$

2.4 Método de Nudos

En el método de mallas, hemos utilizado la LTK para el planteo de las ecuaciones necesarias en el análisis de un determinado circuito. Vamos ahora a estudiar un método en el cual se utiliza fundamentalmente la LCK para el planteo de las diferentes ecuaciones.

Consideremos el circuito de la fig. 2.4.1.

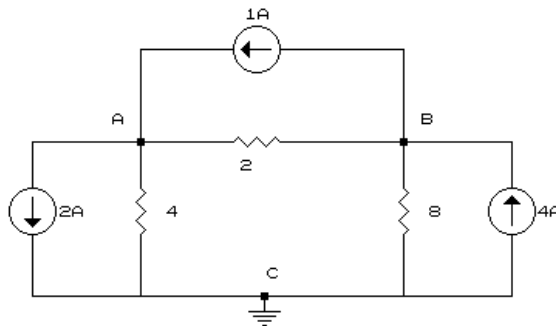


Figura2.4.1

Como en el método de nudos vamos a utilizar la LCK, es preferible usar conductancias ($g = \frac{1}{R}$), en lugar de resistencias. Además las incógnitas van a ser las tensiones de cada uno de los nudos con respecto a un nudo que vamos a llamar nudo de referencia, por lo tanto redibujemos el circuito en cuestión y elijamos como nudo de referencia al nudo C. Normalmente se sugiere tomar como referencia aquel nudo al cual estén conectadas el mayor

número de ramas.

Hemos elegido como referencia al nudo C, lo cual quiere decir que las tensiones se van a medir con esta referencia, en otras palabras tenemos que

$$v_C = 0$$

y tendremos como incógnitas las tensiones

$$v_{AC} = v_A - v_C = v_A - 0 = v_A$$

y $v_{BC} = v_B - v_C = v_B - 0 = v_B$

Por esta razón las incógnitas las designaremos por v_A y v_B , pues implícitamente están referidas al nudo C.

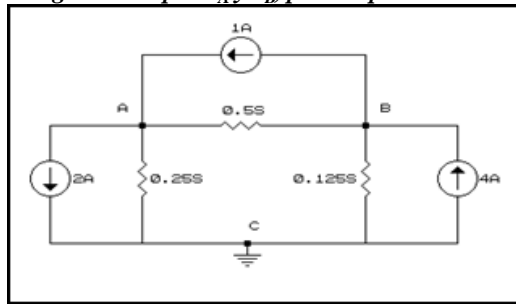


Figura2.4.2

Debemos recordar que como nudos vamos a usar sólo aquellos puntos de la red donde llegan 3 o más ramas. El número de ecuaciones necesarios para analizar la red será igual al número de nudos de la red (**N**) menos 1, esto es necesitamos: **N-1** ecuaciones de nudos.

En el circuito de la figura hay 3 nudos: A, B y C y por lo tanto necesitamos dos ecuaciones de nudos que nos ayudarán a encontrar los valores de v_A y v_B , que son las incógnitas en este caso puesto que $v_C = 0$, ya que corresponde al nudo de referencia.

El paso siguiente en el análisis será aplicar la LCK en los nudos A y B. Para la sistematización del planteo de estas ecuaciones, vamos a utilizar la ley de Ohm, de tal manera que la corriente en los elementos pasivos siempre salga del nudo donde se está planteando la respectiva ecuación de nudos. Esto lo explicaremos tomando la conductancia de 0.5 S conectada entre los nudos A y B y mostrada en la fig. 2.4.3.

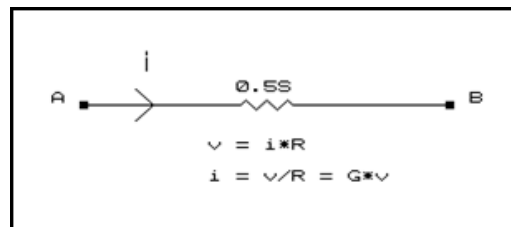


Figura2.4.3

$$i_{AB} = v_{AB} * 0.5 = 0.5(v_A - v_B)$$

i_{AB} implica que la corriente tiene el sentido de A hacia B y $v_{AB} = v_A - v_B$, quiere decir que estamos tomando como terminal positivo de la tensión al nudo A. Pero también podemos considerar que la corriente sale del nudo B hacia el nudo A, en cuyo caso tendremos que usar la tensión v_{BA} en la ley de Ohm, así:

$$i_{BA} = v_{BA} * 0,5 = 0,5(v_B - v_A)$$

Habiendo aclarado estos conceptos, pasemos a plantear las ecuaciones de nudos. Apliquemos la LCK en los nudos A y B y recordemos la convención de signos que establece que las corrientes que salen del nudo las consideramos positivas y las que entran negativas. Entonces tenemos:

$$\text{Nudo A } 0,25 * v_{AC} + 0,5 * v_{AB} + 2 - 1 = 0 \quad (2.4.1)$$

El primer término corresponde a la corriente que fluye de A hacia C en la conductancia de 0,25 S; el segundo término corresponde a la corriente que fluye de A hacia B en la conductancia de 0,5 S. Observe bien que estas corrientes están saliendo del nudo A y por lo tanto son positivas al entrarlas en la ecuación de nudos.

Recordemos que siempre que escribamos $v_{xy} = v_x - v_y$ esto representa la diferencia de tensión entre los nudos x e y donde v_x y v_y son las tensiones de los nudos x e y con respecto al nudo de referencia. Entonces la ecuación (2.4.1) la podremos replantear así:

$$0,25 (v_A - v_C) + 0,5 (v_A - v_B) + 1 = 0$$

$$(0,25 + 0,5) v_A - 0,5 v_B + 1 = 0$$

Ahora en el nudo B tenemos:

$$\text{Nudo B } 0,125 v_{BC} + 0,5 v_{BA} + 1 - 4 = 0$$

Ud. puede notar que se usó la ley de Ohm de tal manera que las corrientes en los elementos pasivos salgan del nudo B, donde se está aplicando la LCK. Replantando esta segunda ecuación queda así:

$$-0,5v_A + (0,125 + 0,5) v_B - 3 = 0$$

Luego las dos ecuaciones que nos permiten hallar v_A y v_B son:

$$0,75v_A - 0,5v_B + 1 = 0$$

$$-0,5v_A + 0,625v_B - 3 = 0$$

(2.4.2)

Al resolverlas obtenemos $v_A = 4 \text{ V}$ y $v_B = 8 \text{ V}$

En las ecuaciones (2.4.2) podemos observar lo siguiente:

- El coeficiente de v_A en la ecuación correspondiente al nudo A es igual a la suma de todas las conductancias que llegan al nudo A y es positivo.
- El coeficiente de v_B en la ecuación correspondiente al nudo B es igual a la suma de todas las conductancias que llegan al nudo B y es positivo también.
- El coeficiente de v_B en la ecuación correspondiente al nudo A y el de v_A en la ecuación correspondiente al nudo B es igual a la suma de todas las conductancias comunes a los nudos A y B, y tiene signo negativo.
- Los términos independientes corresponden a la suma algebraica de los valores de las fuentes de corriente que llegan al respectivo nudo.

Las observaciones anteriores se van a cumplir en cualquier circuito formado por conductancias y fuentes de corriente. Por lo tanto, en el análisis de un circuito de $N + 1$ nudos, tendremos que plantear N ecuaciones de nudos, las cuales tendrán la forma siguiente:

$$\text{Nudo 1 } g_{11} v_1 - g_{12} v_2 \dots \dots - g_{1n} v_n + \Sigma I_1 = 0$$

$$\text{Nudo } 2 \quad -g_{21} V_1 + g_{22} V_2 \dots \dots - g_{2n} V_n + \Sigma I_2 = 0$$

.

(2.4.3)

$$\text{Nudo } i \quad g_{i1} V_1 - g_{i2} V_2 \dots + g_{ii} V_i + g_{in} V_n + \Sigma I_i = 0$$

.

.

$$\text{Nudo } n \quad -g_{n1} V_1 - g_{n2} V_2 \dots + \dots + g_{nn} V_n + \Sigma I_n = 0$$

donde :

g_{ii} = suma de todas las conductancias que llegan al nudo i.

g_{ij} = suma de todas las conductancias conectadas entre el nudo i y el nudo j.

ΣI_i = suma algebraica de todas las fuentes de corriente que salen del nudo i. Recuerde que las corrientes que llegan al nudo se entran en la sumatoria con signo negativo y las fuentes que salen se entran con signo positivo.

El conjunto de ecuaciones (2.4.3) sugiere que también es posible sistematizar el planteo de ecuaciones de nudos, para lo cual consideraremos los casos siguientes:

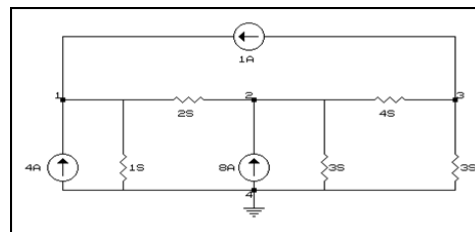
Caso a : Aquí agruparemos aquellos circuitos que solo tienen conductancias y fuentes de corrientes.

Caso b : Incluye a los circuitos con conductancias y fuentes de corriente tanto independientes como controladas (en este caso incluiremos aquellos circuitos que tienen fuentes reales de tensión, que se pueden transformar en fuentes reales de corriente).

Caso c : Circuitos con conductancias y fuentes de corriente independientes y controladas y con fuentes de tensión que no son fácilmente transformables en fuentes de corriente.

Iniciemos ahora la explicación de la sistematización del planteo de las ecuaciones de nudos, para cada uno de los casos en que hemos dividido el "universo" de los circuitos:

Caso a : El circuito mostrado en la fig. 2.4.4 corresponde a este caso.



Figur2.4.4

El método sistemático a seguir es el siguiente:

- a) Asignar un número o letra a cada uno de los **n** nudos de la red, y elegir uno de ellos como referencia. Las incógnitas serán las tensiones en cada uno de los n-1 nudos restantes.
- b) Usar la LCK para plantear una ecuación de nudos, en cada uno de los nudos enumerados, menos en el nudo de referencia. Esto es, tenemos que plantear n-1 ecuaciones de nudos, las cuales tendrán la estructura del sistema de ecuaciones .

c) Resolver el sistema de ecuaciones obtenidos.

Aplicando este procedimiento al circuito de la fig. 2.4.4, vemos que la red tiene 4 nudos de los cuales tomamos el nudo 4 como nudo de referencia. Luego las incógnitas son: v_1 , v_2 y v_3 puesto que $v_4 = 0$ V.

Al utilizar la LCK en el nudo 1, tenemos:

$$(1 + 2)v_1 - 2v_2 - 0v_3 - 4 - 1 = 0$$

Fíjese que para obtener el coeficiente de v_1 , hemos sumado las conductancias (**¡OJO!** las conductancias, y no las resistencias) que llegan al nudo 1. Recuerde que si tiene resistencias las debe convertir en conductancias. El coeficiente de v_2 es negativo y corresponde a la suma de las conductancias conectadas entre los nudos 1 (donde estamos planteando la ecuación de nudos) y el nudo 2. El coeficiente de v_3 es 0, puesto que no hay ninguna conductancia conectada entre los nudos 1 y 3. Los términos independientes corresponden a las fuentes de corriente que llegan al nudo 1, en este caso entran con valor negativo en la ecuación puesto que ambas entran al nudo 1.

Siguiendo estos mismos principios podemos plantear las ecuaciones subsiguientes:

$$\text{Nudo 2} \quad -2v_1 + (2 + 3 + 4)v_2 - 4v_3 - 8 = 0$$

$$\text{Nudo 3} \quad -0v_1 - 4v_2 + (4 + 3)v_3 + 1 = 0$$

Replantando las tres ecuaciones obtenemos:

$$3v_1 - 2v_2 - 0v_3 = 5$$

$$-2v_1 + 9v_2 - 4v_3 = 8$$

$$-0v_1 - 4v_2 + 7v_3 = -1$$

Es bueno insistir en que cada uno de los términos de las ecuaciones corresponde a una corriente, por lo tanto el coeficiente que acompaña a cada una de las tensiones (v_1 , v_2 o v_3) tiene que tener unidades de conductancia y no de resistencia (**¡no olvide esto!**).

En el sistema de ecuaciones podemos observar que $g_{ij} = g_{ji}$, lo cual va ocurrir siempre que la red no tenga fuentes controladas. Este es un primer chequeo que debemos hacer para determinar si las ecuaciones han sido bien planteadas.

Al resolver el sistema de ecuaciones tenemos:

$$v_1 = 3 \text{ V} \quad v_2 = 2 \text{ V} \quad v_3 = 1 \text{ V}$$

Como ejemplo resuelva el problema correspondiente a la fig. 2.4.4, recordando que para hacer uso del método sistemático debe convertir las resistencias en conductancias.

Caso b : Consideremos el circuito de la fig. 2.4.5, donde hay unas fuentes reales de tensión tanto independientes como controladas y fuentes controladas de corrientes.

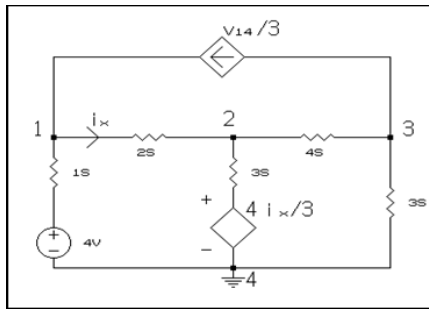


Figura 2.4.5

En el método de nudos se recomienda, en lo posible, trabajar con fuentes de corriente, ya que ello facilita la aplicación de la LCK. En este caso particular vemos que las fuentes de tensión tienen en serie una resistencia (o conductancia) y por lo tanto podemos considerarlas como fuentes reales de tensión que pueden transformarse en fuentes reales de corriente, tal como se ilustra en la fig. 2.4.6.

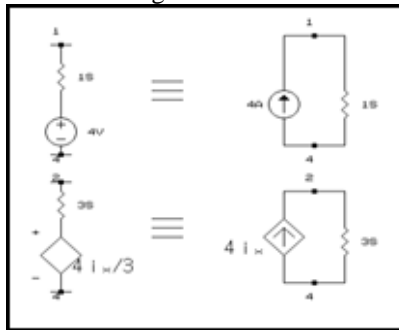


Figura 2.4.6

Luego al hacer estos remplazos el circuito queda como en la fig. 2.4.7.

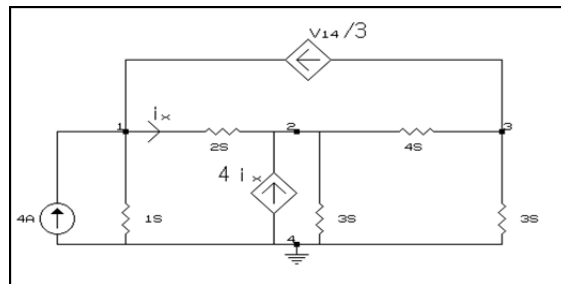


Figura 2.4.7

Tenga presente que al hacer las transformaciones no se debe perder la variable que controla las fuentes controladas. El circuito de la figura quedó con sólo fuentes de corriente, lo cual, como hemos dicho, facilita el planteo de las ecuaciones.

Una vez reordenado el circuito en esta forma, podemos escribir las ecuaciones usando el método sistemático:

$$\begin{aligned}
 \text{Nudo 1} \quad & (1 + 2)v_1 - 2v_2 - 0v_3 - 4 - \frac{1}{3}v_{14} = 0 \\
 \text{Nudo 2} \quad & -2v_1 + (2+3+4)v_2 - 4v_3 - 4i_x = 0 \\
 \text{Nudo 3} \quad & -0v_1 - 4v_2 + (3+4)v_3 + \frac{1}{3}v_{14} = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

La única diferencia con las ecuaciones correspondientes al circuito de la fig. 2.4.4, son los términos correspondientes a la suma de las fuentes de corriente. En este caso aparecen 2 fuentes controladas de corriente, y las variables de control: v_{14} e i_x , deben ser expresadas como función de las incógnitas: v_1 , v_2 y v_3 . Así tenemos:

$$v_{14} = v_1 - v_4 = v_1 - 0 = v_1$$

$$i_x = v_{12} * 2 = 2(v_1 - v_2)$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2.4.4) y reordenando tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} v_1 - 2v_2 - 0v_3 &= 4 \\ -10 v_1 + 17v_2 - 4v_3 &= 0 \\ \frac{1}{3} v_1 - 4v_2 + 7v_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Debido a la presencia de fuentes controladas deja de cumplirse que $g_{ij} = g_{ji}$, por ejemplo:

$$g_{12} = 2 \quad \text{y} \quad g_{21} = 10$$

$$g_{13} = 0 \quad \text{y} \quad g_{31} = 1/3$$

$$g_{23} = 4 \quad \text{y} \quad g_{32} = 4$$

Al resolver el sistema de ecuaciones tenemos:

$$v_1 = 3 \text{ V} \quad v_2 = 2 \text{ V} \quad v_3 = 1 \text{ V}$$

Caso C : Consideremos ahora un circuito con una fuente de tensión que no puede transformarse fácilmente en una fuente de corriente, tal como el mostrado en la fig. 2.4.8.

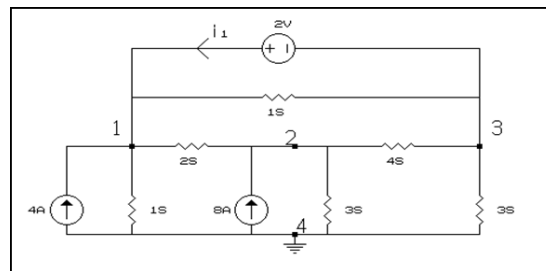


Figura 2.4.8

En dicho circuito podemos observar que la fuente de tensión de 2 V no está en serie con ninguna resistencia, y por lo tanto no es fácil su transformación en una fuente de corriente. Para plantear las ecuaciones de nudos correspondientes al circuito, tenemos que recordar que debemos aplicar la LCK a cada uno de los nudos existentes, esto es, debemos hacer la suma algebraica de las corrientes de cada una de las ramas que llegan al nudo en cuestión, pero cuando la rama corresponde a una fuente de tensión es necesario introducir una nueva incógnita que va a ser la corriente en dicha fuente de tensión, lo cual implica que por cada fuente de tensión se debe agregar una incógnita adicional que será la corriente en dicha fuente, así en la fig. 2.4.8, consideramos que la corriente en la fuente de tensión es i_1 . Habiendo hecho esta aclaración, planteemos las ecuaciones de nudos en la fig. 2.4.8.

$$\text{Nudo 1} \quad 4v_1 - 2v_2 - 1v_3 - 4 - i_1 = 0$$

$$\text{Nudo 2} \quad -2v_1 + 9v_2 - 4v_3 - 8 = 0 \quad (2.4.6)$$

$$\text{Nudo 3} \quad -1v_1 - 4v_2 + 8v_3 + i_1 = 0$$

En este sistema de ecuaciones tenemos 4 incógnitas y sólo 3 ecuaciones y no tenemos ninguna forma de hallar i_1 en función de las tensiones v_1 , v_2 y v_3 , luego sólo nos queda el tratar de plantear una ecuación adicional, la cual es fácil de hallar si acudimos a la fuente de tensión, la cual fuerza a que la diferencia de tensión entre los nudos 1 y 3 sea de 2 V

$$v_1 - v_3 = 2$$

Para el análisis completo del circuito de la fig. 2.4.8 basta con conocer las tensiones v_1 , v_2 y v_3 , y si observamos detenidamente el sistema de ecuaciones (2.4.6), vemos que i_1 se elimina fácilmente sumando las ecuaciones de los nudos 1 y 3, quedando:

$$3v_1 - 6v_2 + 7v_3 - 4 = 0$$

Replantando las ecuaciones tenemos:

$$-2v_1 + 9v_2 - 4v_3 = 8$$

$$3v_1 - 6v_2 + 7v_3 = 4$$

$$v_1 - v_3 = 2$$

Al resolverlas obtenemos:

$$v_1 = 3 \text{ V} \quad v_2 = 2 \text{ V} \quad v_3 = 1 \text{ V}$$

Sugerimos que elimine la conductancia de 1S conectada en paralelo a la fuente ideal de tensión y analice nuevamente el circuito, notará que las tensiones en cada uno de los nudos resultan exactamente la mismas. La respuesta a este resultado aparentemente sorprende, se debe a que todo elemento (excepto otra fuente ideal de tensión) conectado en paralelo a una fuente ideal de tensión es una rama independiente, puesto que el valor de la tensión, corriente y potencia en ese elemento son independientes de lo que ocurra en el resto de la red. Volviendo al circuito de la fig. 2.4.8, podemos ver que se puede calcular la tensión, corriente y potencia en la conductancia de 1S (conectada en paralelo a la fuente de tensión) aún antes de conocer los valores de v_1 , v_2 y v_3 , así:

$$v_{1S} = 2 \text{ V} \quad i_{2S} = 2 \text{ A} \quad P_{2S} = 4 \text{ W}$$

Entonces nos haremos la pregunta siguiente: si no cambian los valores de v_1 , v_2 y v_3 al cambiar el valor de esta rama independiente, ¿Qué variable cambia en el circuito? Usted puede comprobar que sólo cambia la corriente en la fuente de tensión (i_1) y por lo tanto cambia la potencia suministrada por dicha fuente. Para aclarar un poco más este concepto consideremos el circuito de la fig. 2.4.9.

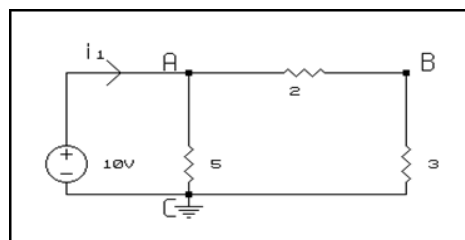


Figura 2.4.9

Por cualquiera de los métodos estudiados Usted puede determinar que $v_A = 10 \text{ V}$ y $v_B = 6 \text{ V}$ en este caso la

corriente $i_1 = 4$ A. Como la resistencia de 5Ω se puede considerar como una rama independiente, cualquier valor de resistencia que Usted conecta entre A y C no alterará los valores de v_A y de v_B , sólo cambiará el valor de i_1 . Por ejemplo, si cambiamos la resistencia de 5Ω por una de 1Ω los resultados serán los siguientes:

$$v_A = 10V \quad v_B = 6V \quad i_1 = 12 A$$

Como conclusión del **caso c**, escribamos el procedimiento que se sugiere seguir:

- Enumere cada uno de los n nudos de la red y elija como referencia uno de ellos. Elija como incógnitas las tensiones de los nudos con respecto al nudo de referencia.
- Asigne también como incógnitas las corrientes en cada una de las fuentes de tensión (colóqueles cualquier sentido).
- Plantee las $n-1$ ecuaciones de nudos necesarias.
- Elimine las corrientes de las fuentes de tensión, asignadas como incógnitas, sumando las ecuaciones apropiadas.
- Por cada fuente de tensión que exista es necesario plantear una ecuación adicional, sabiendo que las fuentes de tensión fuerzan una cierta relación de los valores de estas con las tensiones de los nudos.
- Resuelva el sistema de ecuaciones obtenido.

Veamos algunos otros ejemplos que nos ilustren la aplicación de este método.

Consideremos el circuito de la fig.2.4.10, y encontremos las tensiones en los diferentes nudos con respecto a una referencia convenientemente asignada.

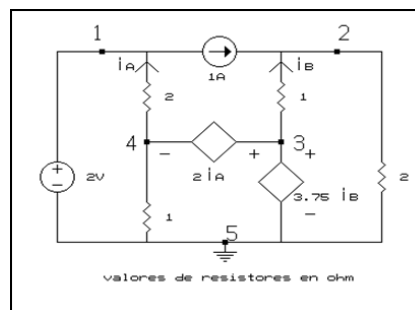


Figura2.4.10

Una observación inicial, se refiere a la elección del nudo de referencia en este **caso c**, esto es, cuando hay fuentes de tensión no fácilmente transformables. En el caso de que tengamos este tipo de circuitos, se sugiere elegir como nudo de referencia un nudo que sea común al mayor número de fuentes de tensión, pues esto, como vamos a demostrar, simplifica mucho el análisis. En el caso en estudio vemos que tanto el nudo 3 como el nudo 5 son nudos comunes a dos fuentes de tensión. Elijamos como referencia el nudo 5, esto automáticamente fija el valor de las tensiones del nudo 1, del nudo 3 e inclusive del nudo 4; y sólo nos quedaría por plantear una ecuación de nudos en el nudo 2. Veamos:

$$v_5 = 0 \text{ V referencia}$$

$$v_1 = 2 \text{ V}$$

$$v_3 = 3,75 i_B$$

(2.4.7)

$$v_4 = -2i_A + 3,75 i_B$$

Fíjese que en este caso particular no se hizo necesario asignar corrientes en las fuentes de tensión, para el planteo de las ecuaciones; además sólo hace falta plantear una ecuación de nudos para completar el número de ecuaciones necesarias para resolver el circuito de la fig. 2.4.10 (5-1 = 4 ecuaciones).

$$\text{Nudo 2 } \left(1 + \frac{1}{2}\right)v_2 - 1v_3 - 1 = 0$$

Además tenemos que:

$$i_A = (v_4 - v_1) * \frac{1}{2} = (v_4 - 2) * \frac{1}{2} = v_4 * \frac{1}{2} - 1$$

$$i_B = (v_3 - v_2)1 = (3,75i_B - v_2) \therefore i_B = + v_2 * \frac{4}{11}$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2.4.7) obtenemos:

$$v_3 = \frac{15}{4} * \frac{4}{11} v_2 = \frac{15}{11} v_2$$

$$v_4 = -v_4 + 2 + \frac{15}{11} v_2$$

$$\frac{3}{2} v_2 - v_3 - 1 = 0$$

Reordenando estas ecuaciones tenemos:

$$-\frac{15}{11} v_2 + v_3 = 0$$

$$-\frac{15}{11} v_2 + 2v_4 = +2$$

$$\frac{3}{2} v_2 - v_3 = +1$$

Al resolver se obtiene:

$$v_2 = 22/3 \text{ V } \quad v_3 = 10 \text{ V } \quad v_4 = 6 \text{ V}$$

Para concluir esta parte resolvamos y analicemos nuevamente el circuito de la fig. 2.4.8, pero tomemos como nudo de referencia el nudo 3 (uno de los extremos de la fuente de tensión), esto debe simplificar el análisis.

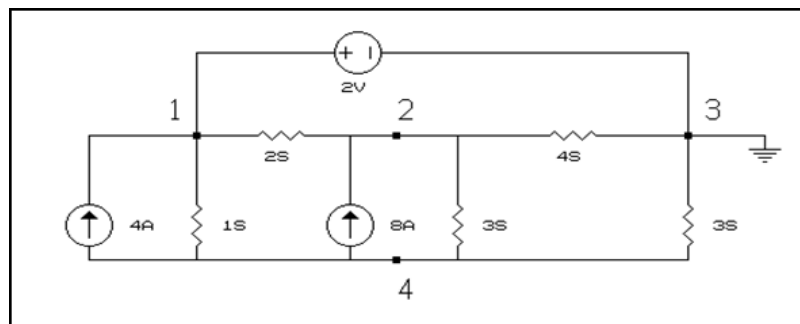


Figura 2.4.11

De acuerdo a esta elección tenemos que:

$$v_1 = 2 \text{ V} \quad \text{y} \quad v_3 = 0 \text{ V}$$

luego sólo es necesario plantear ecuaciones de nudos en el nudo 2 y en el nudo 4 (una ecuación menos que en el caso ya estudiado).

$$\text{Nudo 2} \quad -2v_1 + 9v_2 - 3v_4 - 8 = 0$$

$$\text{Nudo 4} \quad -1v_1 - 3v_2 + 7v_4 + 4 + 8 = 0$$

Pero como sabemos que $v_1 = 2$, se tiene:

$$9v_2 - 3v_4 = 12$$

$$-3v_2 + 7v_4 = -10$$

Que al resolver dan como resultado:

$$v_2 = +1 \quad v_4 = -1 \quad v_1 = 2\text{V}$$

La diferencia de tensión entre cualquiera de los pares de nudos de este circuito y el circuito de la fig. 2.4.12, tiene que ser los mismos, puesto que lo único que hemos cambiado es la referencia. De acuerdo a esto, si Usted conoce las tensiones en los nudos con respecto a cualquiera de ellos que tome como referencia, Usted tiene que estar en capacidad de cambiar de referencia y hallar las tensiones los nudos con respecto a esta nueva referencia.

Por ejemplo, en el circuito de la fig. 2.4.11, tomemos como referencia el nudo 1, tal como está en la fig. 2.4.12.

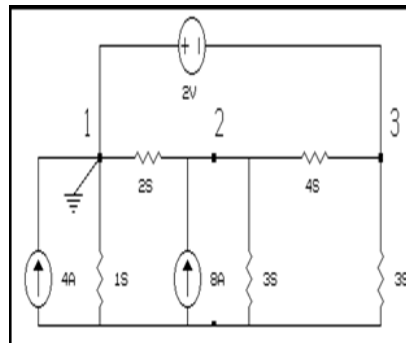


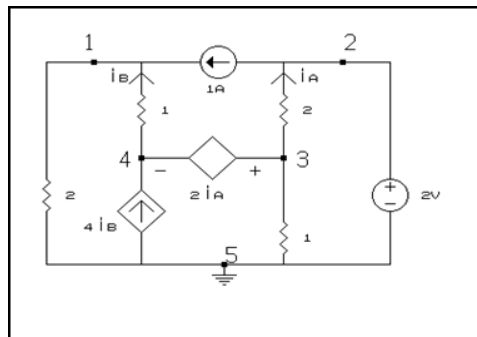
Figura 2.4.12

En este caso:

$v_1 = 0 \text{ V} \quad v_2 = -1 \text{ V} \quad v_3 = -2 \text{ V} \quad v_4 = -3 \text{ V}$ (compruebe esto). Las diferencias de tensión entre cualquier par de nudos es idéntico en los tres circuitos puestos bajo consideración.

EJERCICIOS

- 1) Hallar las corrientes de malla y las tensiones de nudos



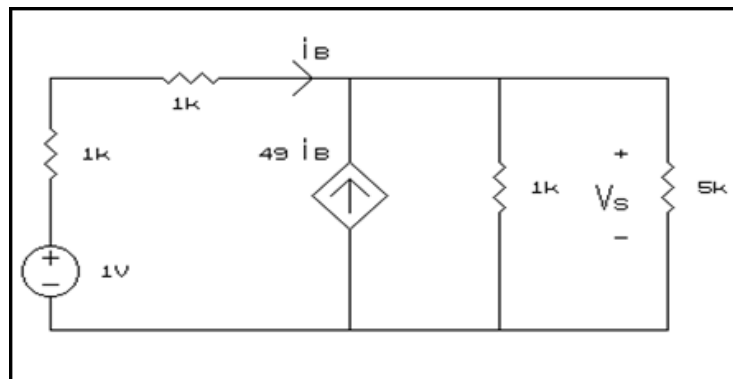
FiguraP.2.1

Respuesta: $I_1 = \frac{11}{3} \text{ A}$ $I_2 = 7 \text{ A}$ $I_3 = 1 \text{ A}$ $I_4 = -1 \text{ A}$
 $v_1 = \frac{22}{3} \text{ V}$ $v_2 = 2 \text{ V}$ $v_3 = 6 \text{ V}$ $v_4 = 10 \text{ V}$ $v_5 = 0 \text{ V}$

- 2) En el ejercicio anterior tome como referencia el nudo **2**, y sin resolver nuevamente el circuito (use los resultados del problema 1) halle los valores de las tensiones en los nudos.
- 3) En el problema **1**, halle la potencia en las fuentes controladas.

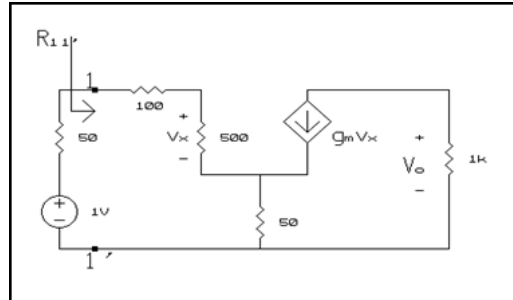
Respuesta: 32 W , $\frac{320}{3} \text{ W}$

4) Halle V_s . Respuesta: $V_s = 25/26 \text{ V}$



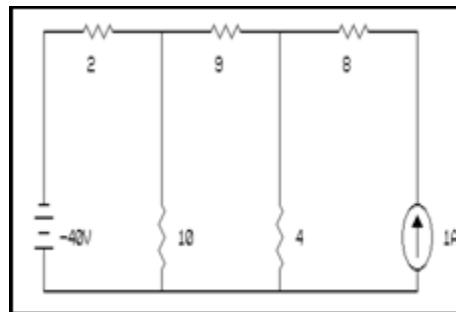
FiguraP.2.2

5) Si $g_m = 200 \text{ mS}$ y $R_{11} = \frac{v_{11'}}{i_1}$. Halle R_{11} y V_0 . Respuesta: $V_0 = -1,25 \text{ V}$ $R_{11} = 750 \Omega$



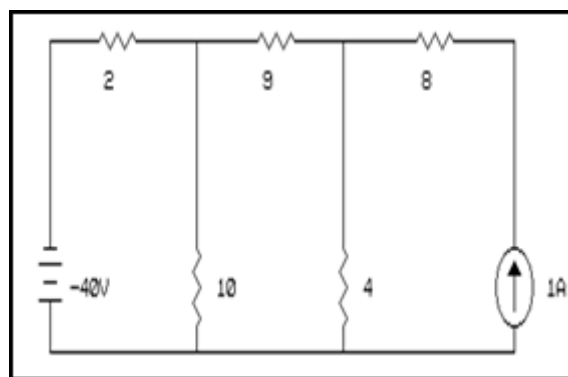
FiguraP.2.3

6) Hallar tensiones de nudos y corrientes de malla en los circuitos siguientes:



FiguraP.2.4

Respuesta: $i_1 = 4 \text{ A}$ e $i_2 = -1 \text{ A}$ $v_1 = 32 \text{ V}$ $v_2 = 24 \text{ V}$ $v_3 = 20 \text{ V}$



FiguraP.2.5

Respuesta: $v_c = 40 \text{ V}$ $v_b = 12 \text{ V}$ $v_a = 30 \text{ V}$ $i_1 = 5 \text{ A}$ $i_2 = 2 \text{ A}$ $i_3 = -1 \text{ A}$

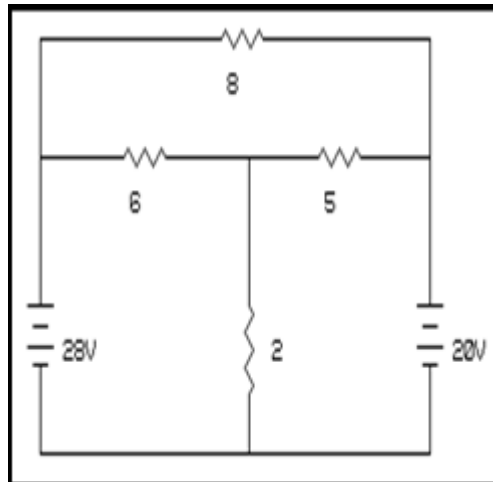


Figura P.2.6

Respuesta: $v_a = 28 \text{ V}$ $v_b = 10 \text{ V}$ $v_c = 20 \text{ V}$ $i_1 = 4 \text{ A}$ $i_2 = 1 \text{ A}$ $i_3 = 1 \text{ A}$

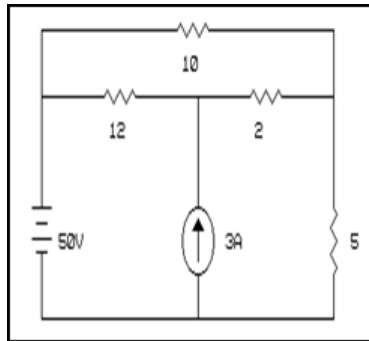


Figura P.2.7

Respuesta: $v_1 = 50 \text{ V}$ $v_2 = 38 \text{ V}$ $v_3 = 30 \text{ V}$ $i_1 = 3 \text{ A}$ $i_2 = 2 \text{ A}$ $i_3 = 6 \text{ A}$

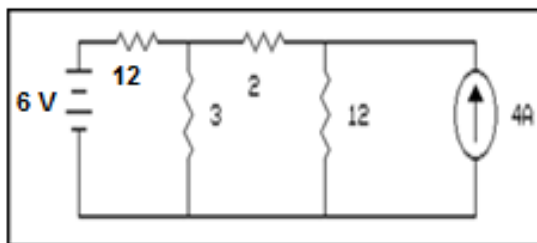


Figura P.2.8

Respuesta: $v_1 = 6 \text{ V}$ $v_2 = 12 \text{ V}$ $i_1 = -1 \text{ A}$ $i_2 = -3 \text{ A}$ $i_3 = -4 \text{ A}$

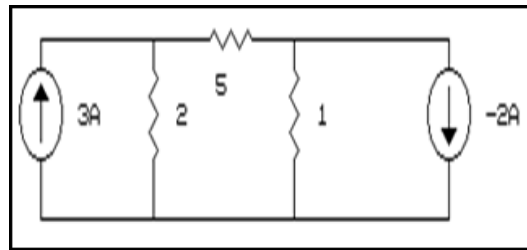


Figura P.2.9

Respuesta: $v_1 = 5V$ $v_2 = 2,5V$ $i_1 = 3A$ $i_2 = 0,5A$ $i_3 = -2A$

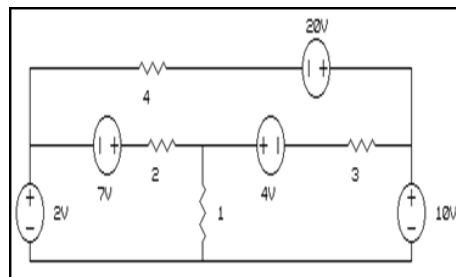


Figura P.2.10

Respuesta: $v_A = 2V$ $v_B = 5V$ $v_C = 10V$ $i_1 = 5A$ $i_2 = 3A$ $i_3 = 0A$

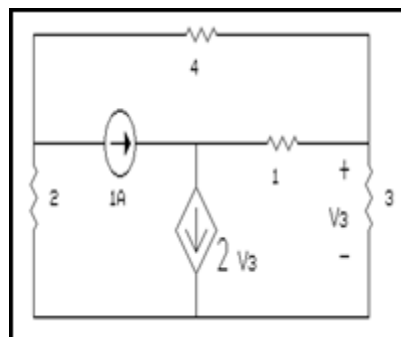


Figura P.2.11

Respuesta:

$$I_1 = -\frac{28}{45} A \quad I_2 = -\frac{4}{45} A \quad I_3 = -\frac{17}{45} A$$

$$v_1 = -\frac{56}{45} V \quad v_2 = -\frac{33}{45} V \quad v_3 = -\frac{12}{45} V$$

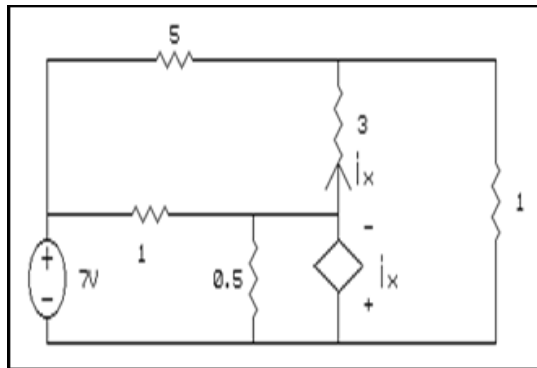


Figura P.2.12

Respuesta: $v_1 = 7\text{ V}$ $v_2 = 0.5\text{ V}$ $v_3 = 2\text{ V}$

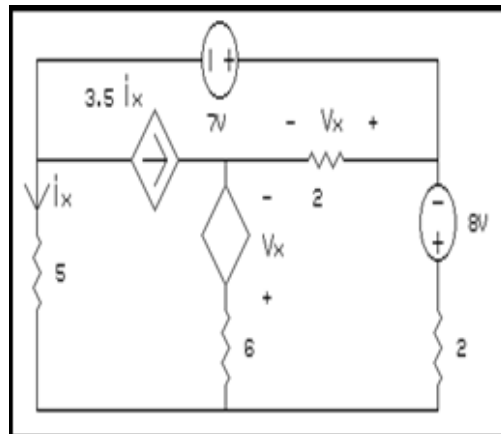


Figura P.2.13

Respuesta: $v_1 = -10\text{ V}$ $v_2 = -16\text{ V}$ $v_3 = -3\text{ V}$ $I_1 = 2\text{ A}$ $I_2 = 2,5\text{ A}$ $I_3 = 9\text{ A}$

7) Halle V_g si la potencia en la resistencia de $10\ \Omega$ es igual a 0 W . **Respuesta:** $V_g = 70\text{ V}$

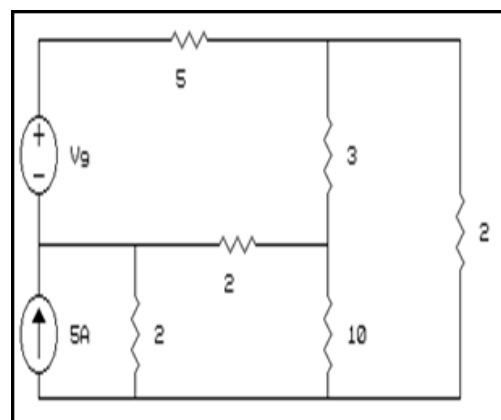
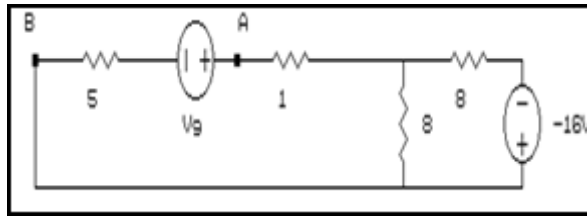


Figura P.2.14

8) Si $V_{ab} = 18\text{ V}$ halle V_g . **Respuesta:** $V_g = 28\text{ V}$



FiguraP.2.15

9) Hallar I_g si $i_x = 0$ **Respuesta:** $I_g = 0,5$ A

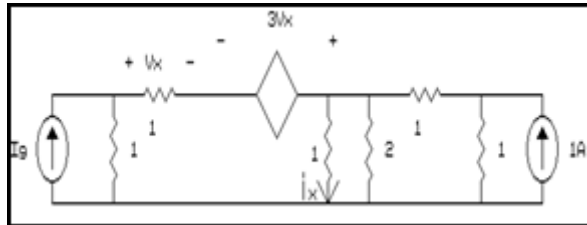
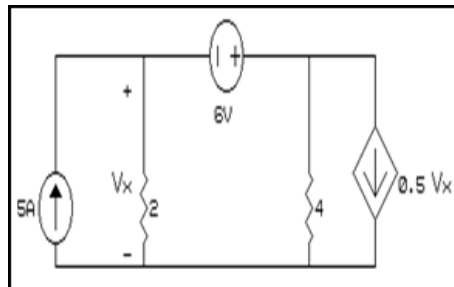


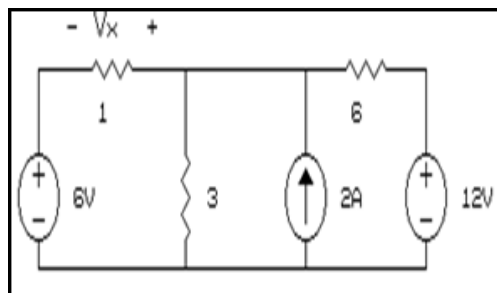
Figura.2.16

10) Halle la potencia en la fuente de 5 A. **Respuesta:** $P = 14$ W



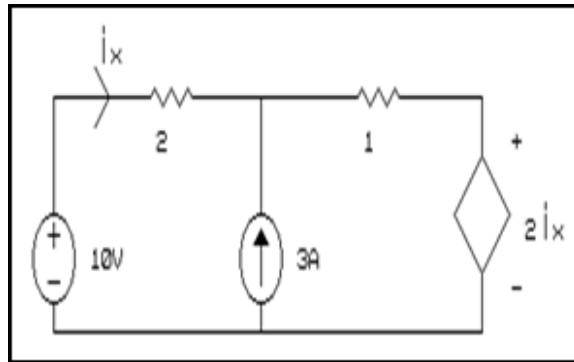
FiguraP.2.17

11) Hallar v_x **Respuesta:** $v_x = 2/3$ V



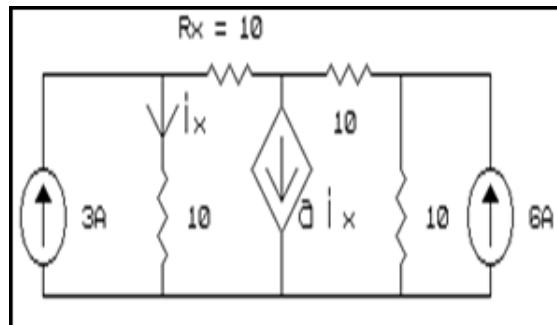
FiguraP.2.18

12) Hallar i_x **Respuesta:** $i_x = 7/5$ A



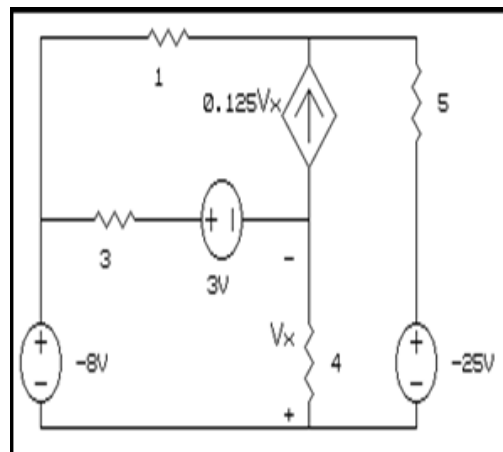
FiguraP.2.19

13) Halle el valor de α para el cual la potencia en $R_x = 70$ W. **Respuesta:** $\alpha = \frac{1}{2}$



FiguraP.2.20

14) Hallar las corrientes de malla. **Respuesta:** $i_1 = 1$ A $i_2 = 2$ A $i_3 = 3$ A



FiguraP.2.21

15) Halle E_0 . **Respuesta:** $E_0 = 0,83$ V

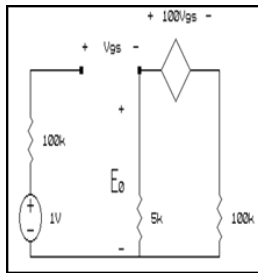


Figura P.2.22

16) a) Si $v_{g1} = 60 \text{ V}$ y v_{g2} entrega 0 W , halle v_{g2} b) Si $v_{g2} = 30 \text{ V}$ y entrega 30 W , halle v_{g1}

Respuesta: $v_{g2} = -30 \text{ V}$ $v_{g1} = 110 \text{ V}$

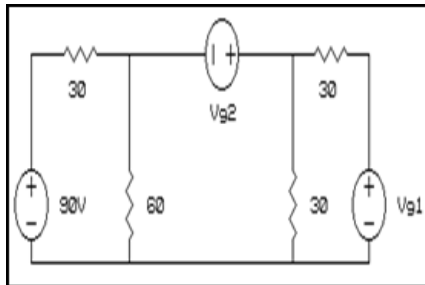


Figura P.2.23

17) Halle V_1 tal que $i_2 = 2 \text{ A}$ **Respuesta:** $V_1 = -25 \text{ V}$

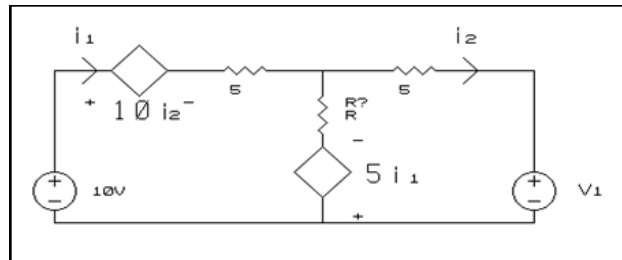


Figura P.2.24

18) Halle I_1 . **Respuesta:** $I_1 = 190,84 \mu\text{A}$

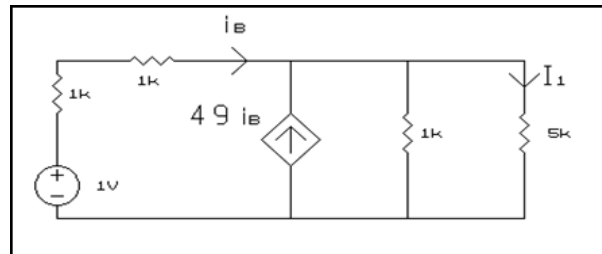
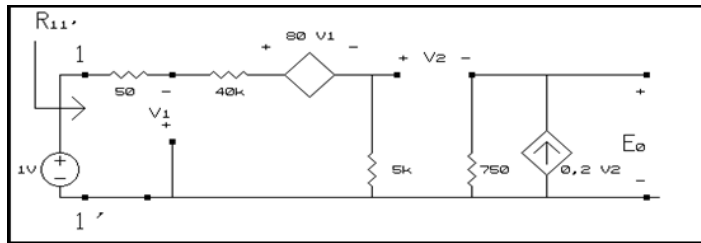


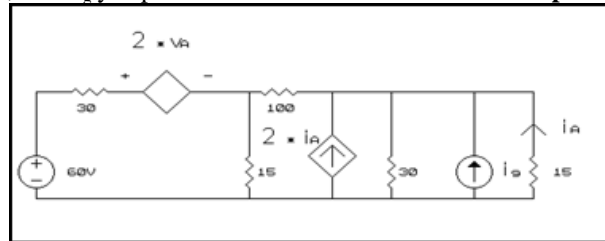
Figura P.2.25

19) Halle E_0 y R_{11} . **Respuesta:** $E_0 = 4,96 \text{ V}$ $R_{11} = 605 \Omega$



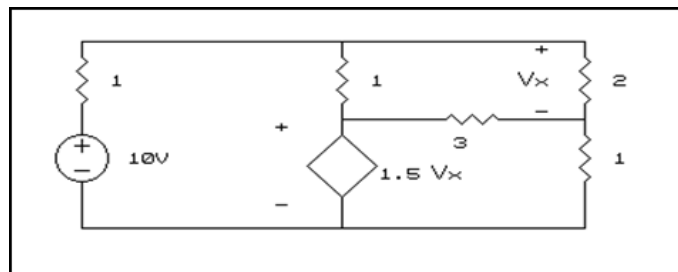
FiguraP.2.26

20) Si P en $R=100 \Omega$ es 0 W, halle i_g y la potencia en las fuentes controladas. **Respuesta:** $i_g = 14 \text{ A}$ $P = 480 \text{ W}$



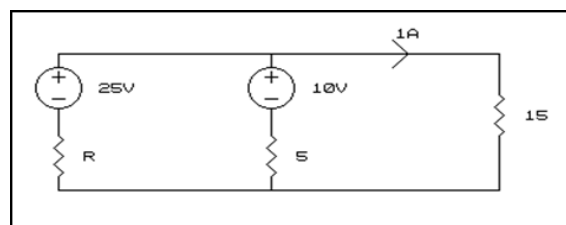
FiguraP.2.27

21) Hallar tensiones de pares de nudos. **Respuesta:** $v_1 = 7 \text{ V}$ $v_2 = 6 \text{ V}$ $v_3 = 3 \text{ V}$



FiguraP.2.28

22) Halle R. Por cual valor de resistencia se puede reemplazar la fuente de 10 V, para obtener un circuito equivalente. **Respuesta:** 5Ω , 10Ω



FiguraP.2.29

23) Halle V_{AB} . **Respuesta:** $V_{AB} = 20 \text{ V}$

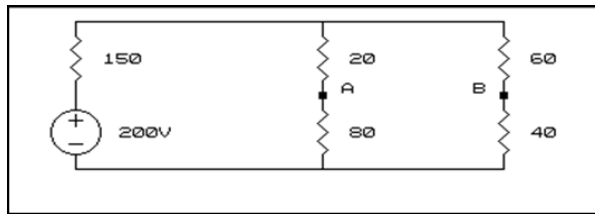


Figura P.2.30

24) Hallar I . Respuesta: $I = 1 \text{ A}$

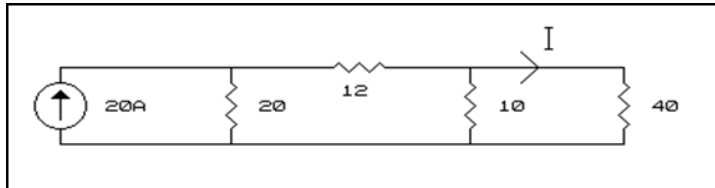


Figura P.2.31

25) Halle v_x . Respuesta: $v_x = 60 \text{ V}$

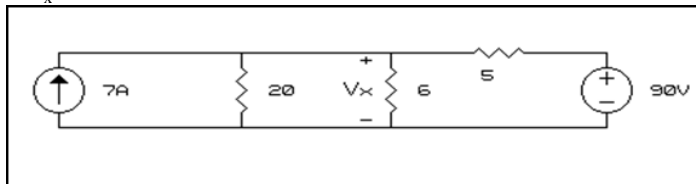


Figura P.2.32

26) Hallar potencia en la fuente controlada. Respuesta: $P = 512 \text{ W}$

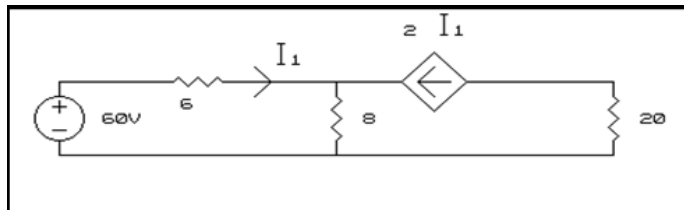


Figura P.2.33

27) Hallar tensiones de pares de nudos y corrientes de mallas. Respuesta: $v_1 = 25 \text{ V}$ $v_2 = 10 \text{ V}$
 $v_3 = -5 \text{ V}$ $i_1 = 5 \text{ A}$ $i_2 = 0 \text{ A}$ $i_3 = 0 \text{ A}$ $i_4 = 5 \text{ A}$

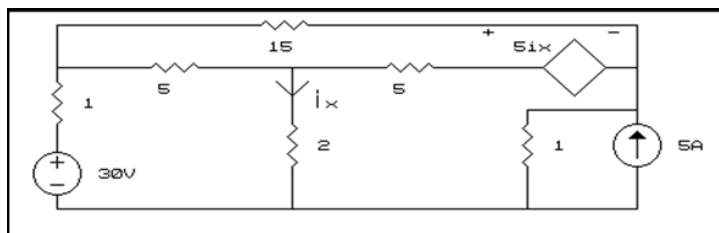
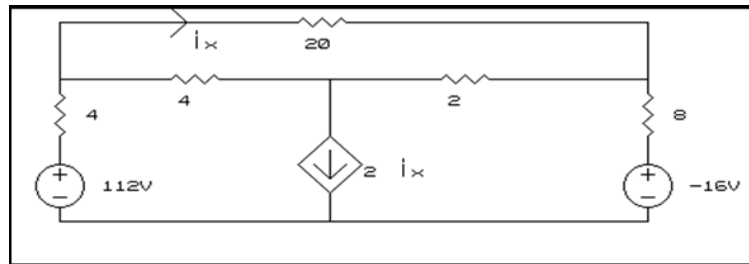


Figura P.2.34

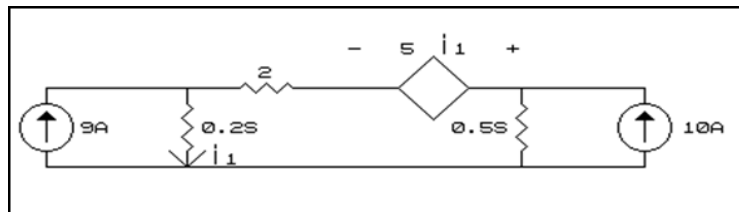
28) Hallar tensiones de pares de nudos y corrientes de malla. Respuesta: $v_1 = 72 \text{ V}$ $v_2 = 40 \text{ V}$ $v_3 = 32 \text{ V}$ $i_1 = 10 \text{ A}$
 $i_2 = 6 \text{ A}$ $i_3 = 2 \text{ A}$



FiguraP.2.35

29) Hallar tensiones de pares de nudos y corrientes de malla. **Respuesta:** $v_1 = 30\text{ V}$ $v_2 = 20\text{ V}$
 5 A $i_3 = -10\text{ A}$

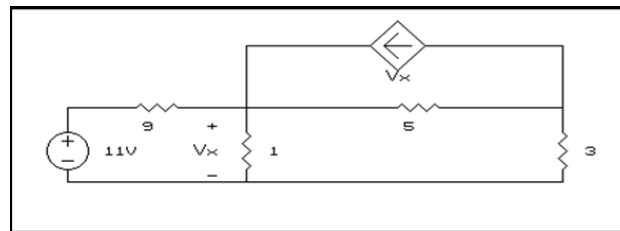
$i_1 = 9\text{ A}$ $i_2 =$



FiguraP.2.36

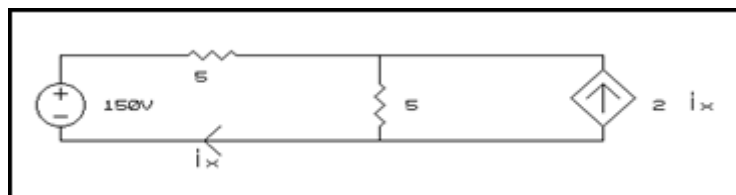
30) Hallar tensiones de pares de nudos, corrientes de malla y la resistencia de entrada R_{11} .

Respuesta: $v_1 = 11\text{ V}$ $v_2 = 2\text{ V}$ $v_3 = -3\text{ V}$ $i_1 = 1\text{ A}$ $i_2 = -1\text{ A}$ $i_3 = -2\text{ A}$ $R_{11} = 11\Omega$



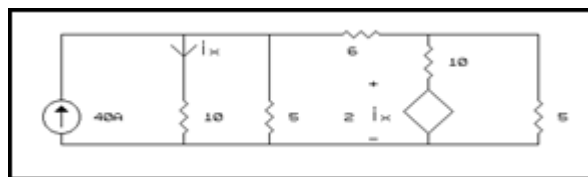
FiguraP.2.37

31) Hallar potencia en fuente controlada. **Respuesta:** $P = 120\text{ W}$



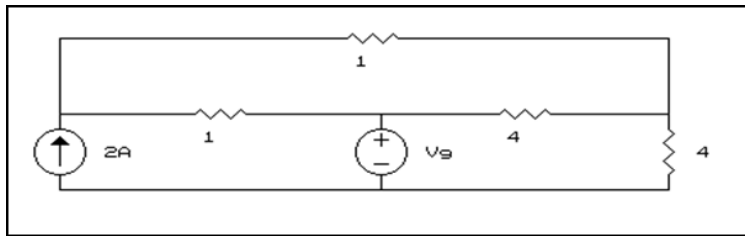
FiguraP.2.3897

32) Hallar tensiones de pares de nudos. **Respuesta:** $v_1 = 100\text{ V}$ $v_2 = 40\text{ V}$



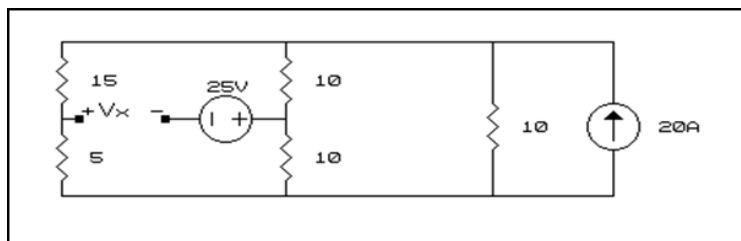
FiguraP.2.39

33) Halle V_g de tal manera que entregue 0 W. ¿Si Usted eliminara V_g , obtendría la misma. respuesta? **Respuesta:**
 $V_g = 8V$



FiguraP.2.40

34) Halle v_x . **Respuesta:** $v_x = 0 V$



FiguraP.2.41

CAPITULO 3

OTROS METODOS USADOS EN EL ANALISIS DE REDES ELECTRICAS.

3.1 Principio de superposición:

Hasta ahora los elementos pasivos considerados (resistencias), podemos decir que son elementos lineales; lo cual quiere decir que:

- cumplen con el principio de proporcionalidad, y
- cumplen con el principio de superposición.

Consideremos por ejemplo una resistencia R a la cual se le aplica una tensión v (excitación) y se obtiene una corriente i (respuesta).

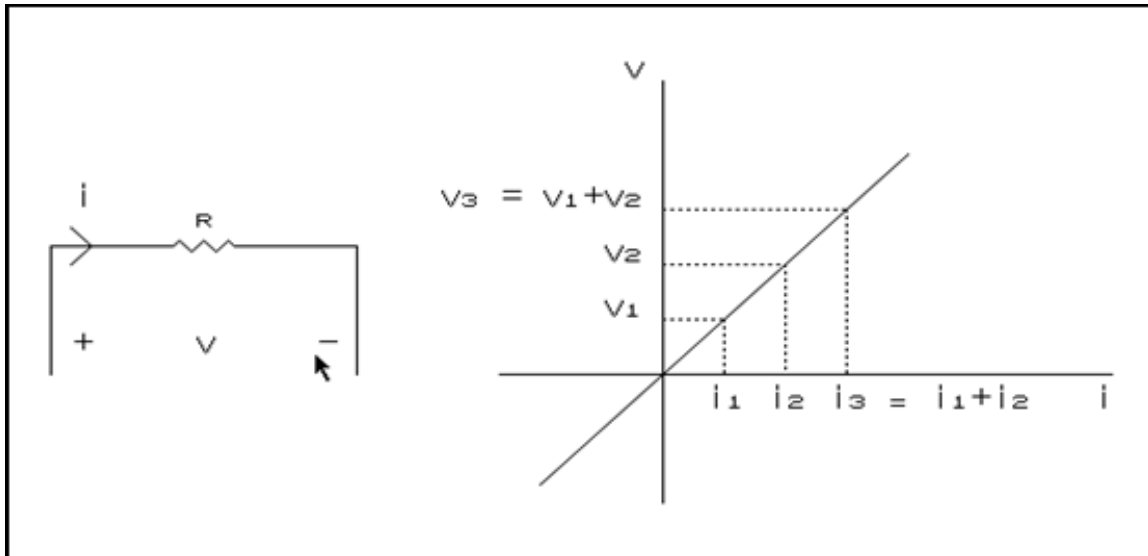


Figura 3.1.1

Si duplicamos la tensión a $2v_1$ la corriente también se duplica según el principio de proporcionalidad, esto es:

$$Kv_1 = R (Ki_1)$$

Si aplicamos simultáneamente las tensiones v_1 y v_2 obtenemos como respuesta $i_1 + i_2$.

$$\begin{aligned} v_1 &= Ri_1 \\ v_2 &= Ri_2 \end{aligned}$$

$$v_1 + v_2 = R (i_1 + i_2)$$

Principio de Superposición

Siempre que se cumplan estos dos principios podemos decir que el elemento es lineal. Bajo esta definición concluimos que las fuentes independientes tanto de tensión como de corriente **no** son elementos lineales, en cambio las fuentes controladas si lo son.

En algunas ocasiones nos vamos a encontrar con resistencias cuyo valor R dependen del valor de tensión o corriente que circulen a través de ella, esto hace que su comportamiento no sea lineal. En este caso va a ser de mucha utilidad estudiar técnicas gráficas para el análisis de estos circuitos. En esta parte nos ocuparemos de estudiar el llamado: **Principio de Superposición.**

Para su explicación, aplicado a circuitos eléctricos, podemos considerar que las excitaciones son las fuentes independientes (sólo las independientes y no las fuentes controladas) de corriente o tensión y las respuestas son las tensiones o corrientes en una rama cualquiera de la red; entonces en un circuito cualquiera donde existen varias fuentes independientes se obtienen una respuesta total debida a los efectos de todas las fuentes actuando simultáneamente, pero si los circuitos que estamos excitando con dichas fuentes son lineales, esto es, cumplen con el principio de superposición, podemos encontrar la respuesta total como la suma algebraica de las respuestas producidas por cada una de las fuentes independientes actuando sola, algo similar a lo que hacemos para determinar el peso total de dos masas de hierro; pesamos cada una individualmente y después sumamos las respectivas respuestas.

Para aclarar esto, hagamos unos ejemplos ilustrativos. Consideremos el circuito de la fig. 3.1.2, donde aparece una red resistiva excitada simultáneamente por una fuente de corriente de 11 A y una fuente de tensión de 20 V.

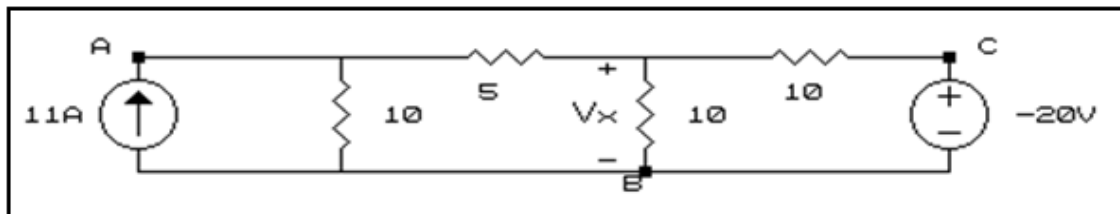


Figura 3.1.2

En dicha red, queremos hallar el valor de tensión v_x , aplicando el principio de superposición. Como hemos dicho, la tensión v_x se debe al efecto producido por la fuente de tensión y al efecto producido por la fuente de corriente, lo cual quiere decir que:

$$V_x = V_{x1} + V_{x2}$$

donde:

v_{x1} = respuesta cuando solamente actúa la fuente de corriente.

v_{x2} = respuesta cuando solamente actúa la fuente de tensión.

Luego, aplicar el principio de superposición quiere decir que debemos hallar v_{x1} y v_{x2} , para luego obtener la respuesta total como la suma algebraica de estas dos respuestas parciales. Calculemos primero v_{x1} , para lo cual debe actuar solamente la fuente de corriente, y debemos eliminar el efecto de la fuente de tensión, tal como se muestra en la fig. 3.1.3.

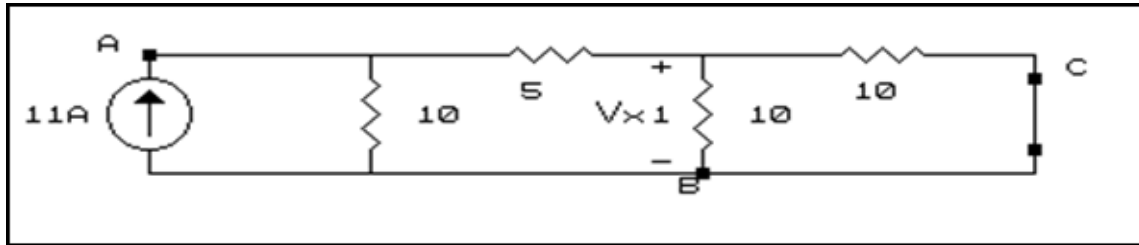


Figura 3.1.3

Para eliminar el efecto de la fuente de tensión, hemos quitado la fuente y cortocircuitado los puntos entre los cuales estaba colocada, esto es:

$$V_{CB} = 0 \quad (\text{cuando existía la fuente su valor era de } -20\text{V}).$$

Estos pasos deben seguirse siempre que se quiera eliminar el efecto de una fuente ideal de tensión, puesto que sabemos que la fuente ideal de tensión fuerza a que la tensión entre el par de nudos entre los cuales esté conectada sea igual al valor de ella, y para eliminar su efecto debemos hacer que la tensión entre dicho par de nudos sea cero, lo cual se logra cortocircuitando los nudos entre los cuales ella estaba conectada.

El circuito de la fig. 3.1.3 se puede reducir a un circuito como el mostrado en la fig. 3.1.4.

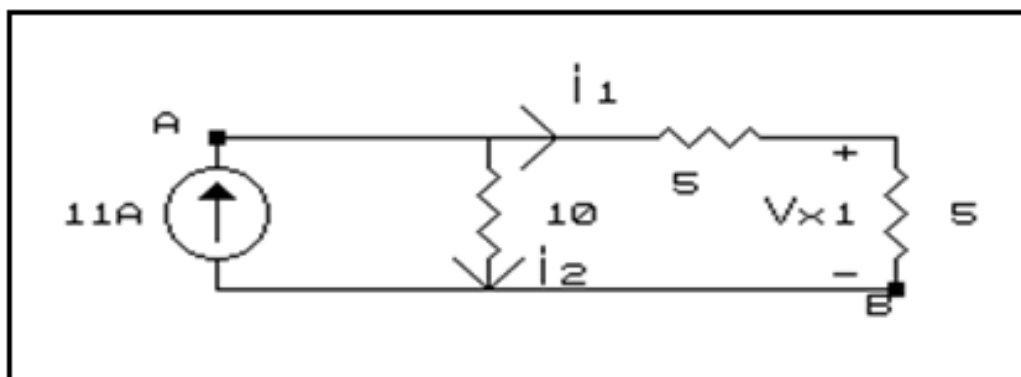


Figura 3.1.4

$$i_1 = 5,5 \text{ A} ; \quad i_2 = 5,5 \text{ A} ; \quad v_{x1} = 27,5 \text{ V}$$

En él se puede hallar fácilmente v_{x1} .

Calculemos ahora el valor de v_{x2} , para lo cual debemos dejar actuando solamente a la fuente de tensión, esto es, debemos eliminar el efecto producido por la fuente de corriente, tal como se muestra en la fig. 3.1.5.

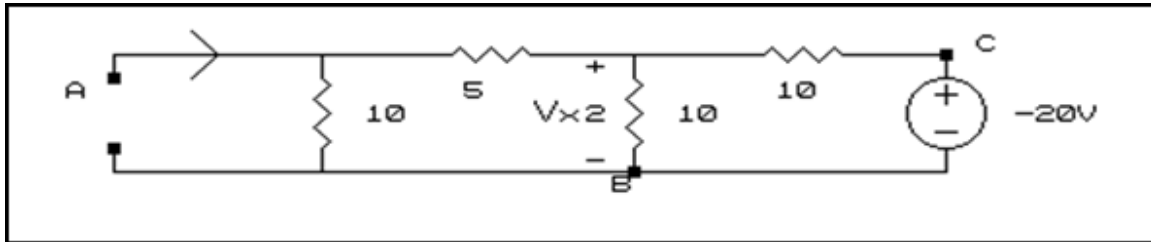


Figura 3.1.5

Para eliminar el efecto de la fuente de corriente hemos quitado la fuente de corriente y se han dejado abiertos los nudos entre los cuales estaba colocada, luego:

$$i = 0 \quad (\text{cuando existía la fuente su valor era de } 11\text{A}).$$

Estos pasos deben seguirse siempre que se quiera eliminar el efecto de una fuente ideal de corriente. Fíjese que haciendo esto reduce la corriente en la rama donde estaba colocada; la fuente se hace cero y así se anula el efecto de la fuente ideal de corriente.

Para calcular v_{x2} reduzcamos el circuito de la fig. 3.1.5 en la siguiente forma:

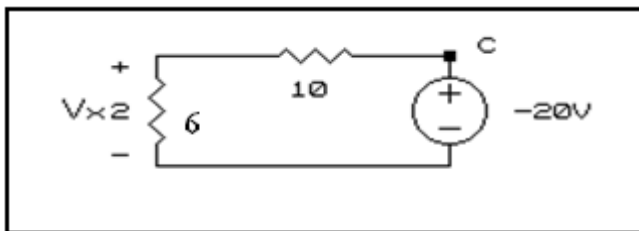


Figura 3.1.6

$$R = \frac{(10+5) 10}{(10+5) 10} = \frac{150}{25} = 6 \Omega$$

$$V_{x2} = -20 \times \frac{6}{16} = -7,50 \text{ V}$$

La respuesta total corresponde a la superposición de las respuestas obtenidas, luego:

$$v_x = v_{x1} + v_{x2} = 27,5 - 7,5 = 20 \text{ V}$$

Consideremos ahora el circuito de la fig. 3.1.7, donde aparecen tres fuentes independientes y una fuente controlada de corriente, y se quiere hallar i_x utilizando el principio de superposición.

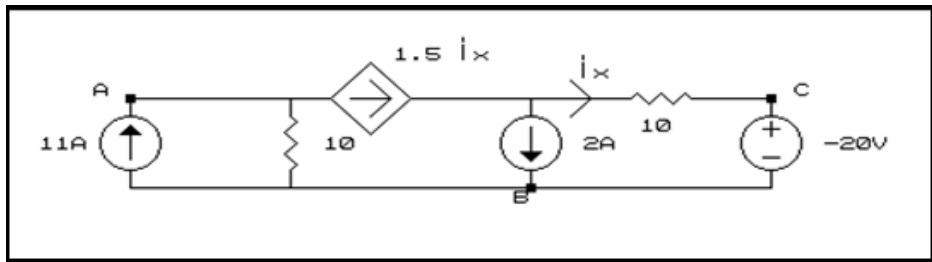


Figura 3.1.7

Como hay tres fuentes independientes, tenemos que: $i_x = i_{x1} + i_{x2} + i_{x3}$

donde: i_{x1} es la respuesta cuando solamente actúa la fuente de 11 A.

i_{x2} es la respuesta cuando solamente actúa la fuente 2 A.

i_{x3} es la respuesta cuando solamente actúa la fuente de 20 V.

Cálculo de i_{x1}

En el circuito de la fig. 3.1.8, hemos eliminado los efectos de las fuentes de 2A y de 20V y solo actúa la fuente de 11A. Al tratar de hallar i_{x1} nos encontramos con algo extraño:

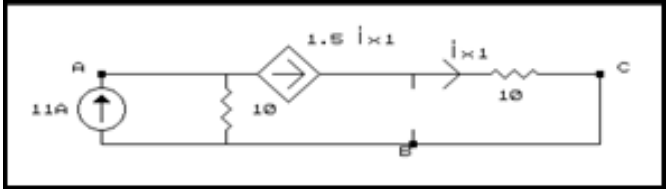


Figura 3.1.8

$$\frac{3}{2} i_{x1} = i_{x1}$$

La única posibilidad para que esta ecuación se cumpla es que $i_{x1} = 0$, de lo contrario entraremos en una contradicción.

Cálculo de i_{x2}

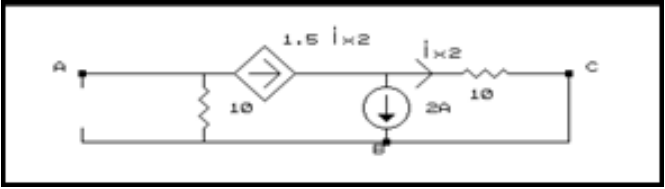


Figura 3.1.9

$$-\frac{3}{2} i_{x2} + i_{x2} + 2 = 0$$

$$\therefore i_{x2} = 4 A$$

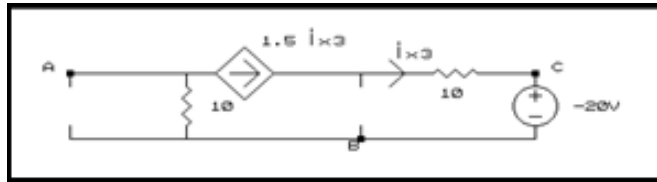


Figura 3.1.10

$$\frac{3}{2}i_{x3} = i_{x3}$$

$$\therefore i_{x3} = 0$$

Tenga muy presente que el principio de superposición sólo se aplica a las fuentes independientes, puesto que en un circuito donde sólo hayan fuentes controladas y otros elementos pasivos, las corrientes y tensiones en todas las ramas son nulas, veamos por ejemplo el circuito de la fig. 3.1.11.

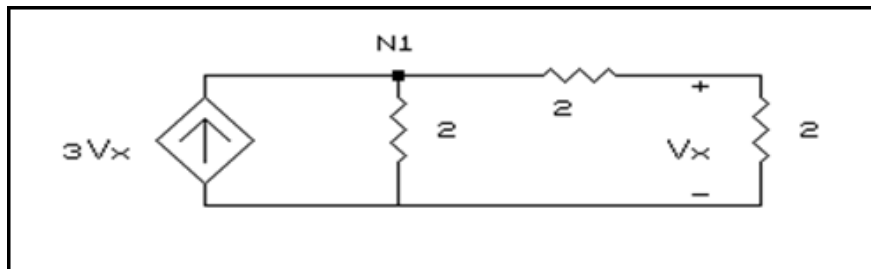


Figura 3.1.11

Al aplicar la LCK al nudo 1 tenemos:

$$-3V_x + V_1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0$$

pero

$$V_x = \frac{V_1}{2}$$

$$-3V_x + 2V_x\frac{3}{4} = 0 \quad \therefore \quad V_x = 0$$

luego, todas la tensiones y corrientes en la red son nulas.

El principio de superposición es otro método de análisis de circuitos, que Usted debe conocer, pero debo advertirle que normalmente es un método que no simplifica la solución, sin embargo, como Usted verá en capítulos posteriores, hay problemas sobre redes eléctricas donde la única alternativa de métodos de análisis es la que corresponde a la utilización del principio de superposición.

3.2 Teorema de Thevenin

En muchas ocasiones nos vamos a encontrar que solo queremos hallar tensión, corriente o potencia en una rama de la red, tal como lo muestra la fig. 3.2.1, donde, por ejemplo, se quiere hallar el valor de la potencia en dicho elemento, el cual puede variarse y se considera como carga de la red.

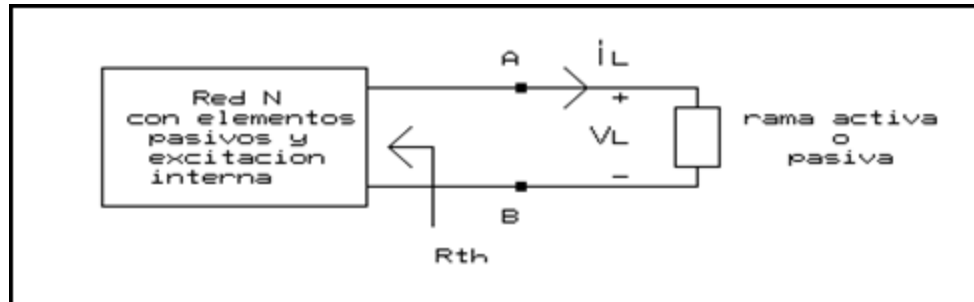


Figura 3.2.1

En estos casos es innecesario acudir al método de mallas o al método de nudos y, en cambio, si es útil aplicar ciertos teoremas que vamos a estudiar a continuación, los cuales normalmente simplifican la forma de hallar la tensión, corriente o potencia en la rama variable del circuito.

Para determinar el valor de P_L , toda la red representada dentro de la caja puede ser reemplazada por una fuente de tensión equivalente V_{Th} , en serie con una resistencia equivalente R_{Th} (recuerde que por ahora solo estamos considerando circuitos con fuentes y resistencias). La tensión V_{Th} es la tensión que aparece entre los terminales A y B cuando se abren dichos terminales, tal como se muestra en la fig. 3.2.2. La resistencia equivalente R_{Th} , es la resistencia vista desde los terminales A y B mirando hacia la red que se quiere reemplazar, cuando todas las fuentes independientes de tensión se han cortocircuitado y todas las fuentes independientes de corriente se han abierto, es decir se ha "**pasivizado**" la red que se quiere reemplazar o, en otras palabras, hemos eliminado los efectos de todas las fuentes independientes de la red.

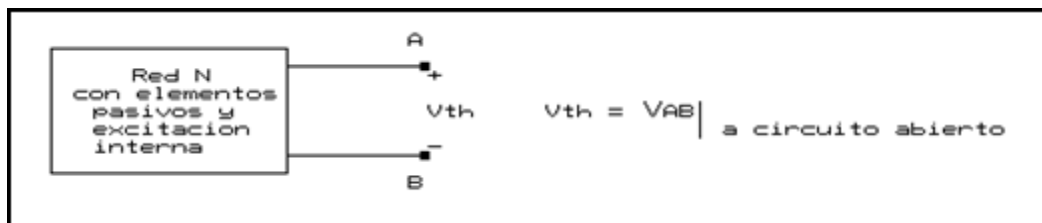


Figura 3.2.2

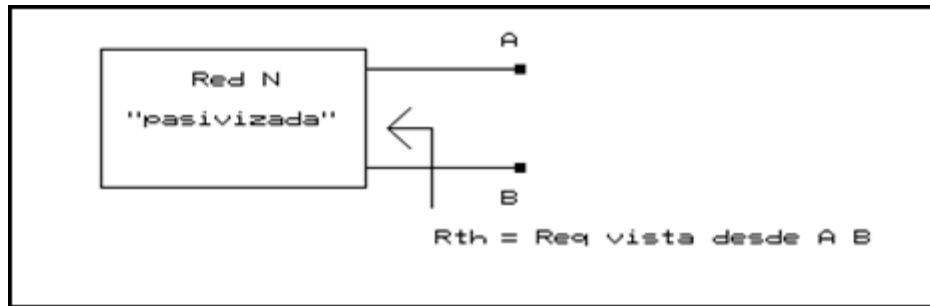


Figura 3.2.3

En resumen podemos decir que el teorema de Thevenin permite reemplazar una red cualquiera, por una "fuente real de Thevenin" tal como se esquematiza en la fig. 3.2.4.

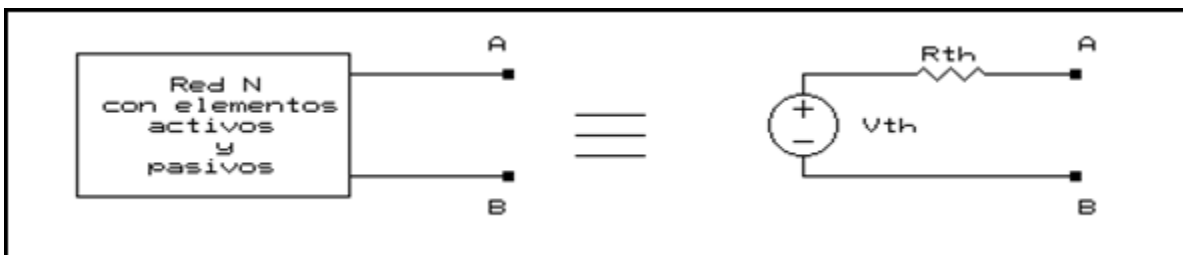


Figura 3.2.4

El único requisito para el teorema de Thevenin es que el elemento (o elementos) que forman la rama, entre cuyos extremos se va a aplicar el teorema de Thevenin, no estén acoplados magnéticamente con algún elemento de la red N (posteriormente estudiaremos las redes con acoplamiento magnético).

A continuación ilustraremos la forma de aplicar el teorema de Thevenin a diferentes tipos de redes eléctricas. Explicaremos diferentes métodos para hallar el circuito equivalente de una red N.

Consideremos el circuito de la fig. 3.2.5, donde se pide hallar el valor de i_x .

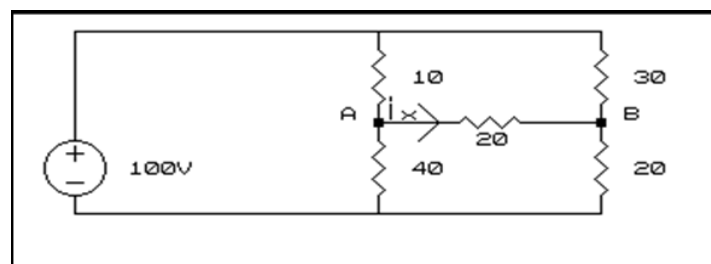


Figura 3.2.5

Para obtener el valor de i_x vamos a hallar el equivalente de Thevenin de la red N entre los terminales A y B. La red N quedaría tal como se muestra en la fig. 3.2.6.

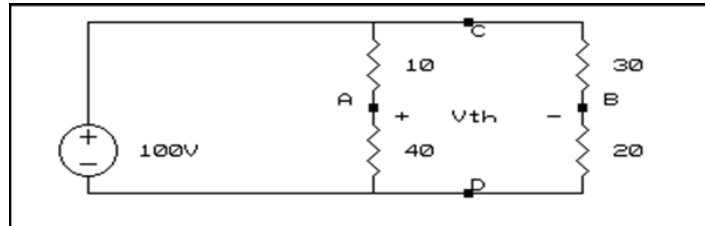


Figura 3.2.6

Por definición sabemos que $V_{Th} = V_{AB}$ a circuito abierto (no olvide que para hallar V_{Th} debe abrir los terminales A y B). Como en la fig. 3.2.6 ya hemos abierto los terminales A y B, basta con determinar el valor V_{AB} , el cual corresponde al valor de la fuente de tensión equivalente de la red N.

Aplicando la relación del divisor de tensión tenemos:

$$V_{AD} = 100 \times \frac{40}{50} = 80 \text{ V}$$

$$V_{BD} = 100 \times \frac{20}{50} = 40 \text{ V}$$

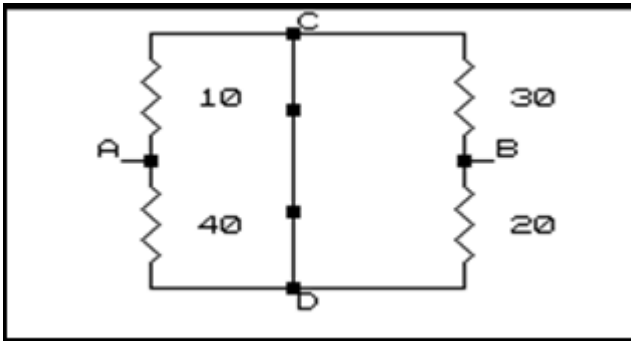
$$V_{Th} = V_{AD} - V_{BD} = 40 \text{ V} \quad \therefore \quad V_{Th} = 40 \text{ V}$$

En resumen, para hallar la tensión equivalente de Thevenin es necesario identificar la red N colocada entre los terminales A y B y luego abrir dicho par de terminales, para finalmente calcular la tensión V_{AB} a circuito abierto.

Para hallar la resistencia equivalente de Thevenin vamos a explicar tres métodos diferentes:

1. Por reducción de resistencias

Este método consiste en hallar la resistencia equivalente de la red "pasivizada", por reducción de resistencias en serie y paralelo. La red N "pasivizada" se muestra en la fig. 3.2.7, donde se ha cortocircuitado la fuente de tensión.



$$R_{Th} = R_{AB} = \frac{10 \times 40}{50} + \frac{30 \times 20}{50}$$

$$R_{Th} = 20\Omega$$

Figura 3.2.7

2. Por excitación de la red "pasivizada"

Tal como lo dice el teorema de Thevenin, la Red N se puede remplazar por una resistencia equivalente R_{Th} y una fuente de tensión equivalente V_{Th} (ver fig. 3.2.8). Al "pasivizar" la red, el circuito equivalente tendrá solo una resistencia R_{Th} , puesto que hemos eliminado el efecto de las fuentes independientes.

Esto se muestra en la fig. 3.2.8, lo cual nos sugiere otro método para hallar R_{Th} cuyos pasos son los siguientes:

- a. "Pasivizar" la red N.

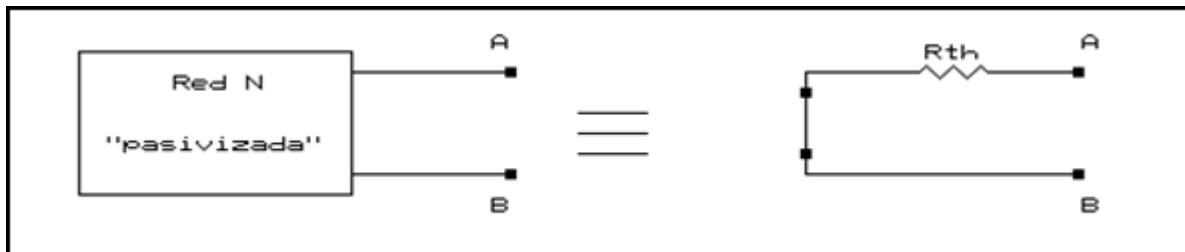


Figura 3.2.8

- b. Excitar el circuito con una fuente de tensión o corriente de valor conocido tal como se muestra en la fig. 3.2.9.

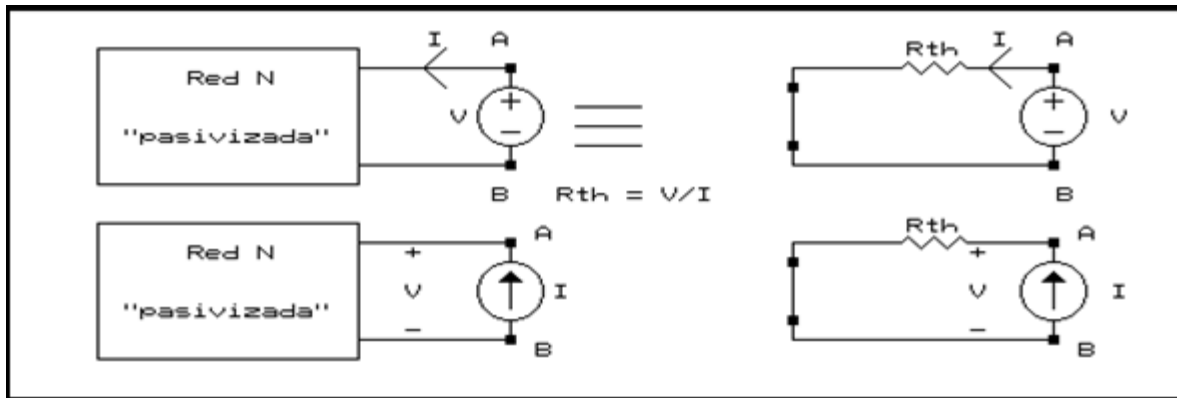


Figura 3.2.9

Es muy importante que siempre tenga presente esta figura para el cálculo de I o V, puesto que del sentido de I o de la polaridad de V, va a resultar una R_{Th} que incluso puede ser negativa en algunos casos.

c. Calcular R_{Th} , con los valores de V ó I hallados.

Apliquemos este método a la red N "pasivizada" mostrada en la fig. 3.2.10. Este circuito, consideramos, que es preferible excitarlo con una fuente de tensión tal como se muestra en la fig. 3.2.10. Supongamos que el valor de la fuente de excitación es V_g .

Para hallar I, debemos determinar I_1 e I_2 . I_1 lo podemos encontrar directamente:

$$I_1 = \frac{V_g}{6}$$

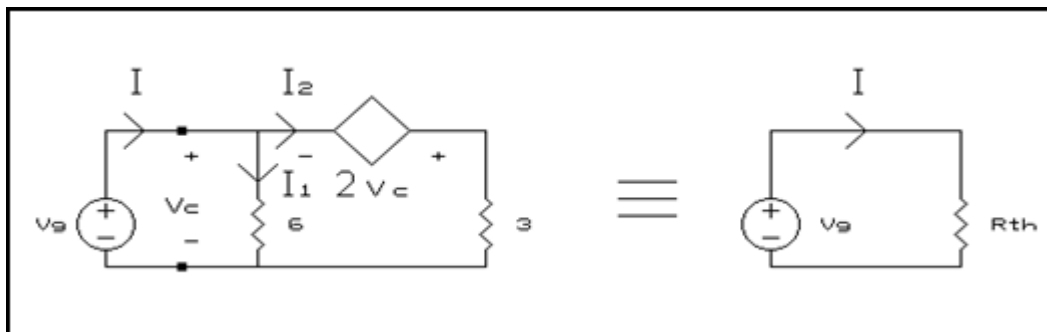


Figura 3.2.10

Para hallar I_2 , utilizemos la LTK:

$$V_g = -2V_c + 3I_2$$

pero como: $V_c = V_g$; tenemos que: $I_2 = \frac{V_g}{1}$

Aplicando la LCK tenemos : $I = I_1 + I_2 = \left(\frac{7}{6}\right) V_g$

Luego $R_{Th} = \frac{V_g}{I} = \frac{6}{7} \Omega$

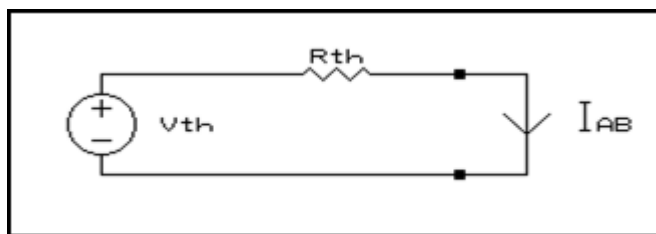
A continuación se muestra el tercer método para hallar R_{Th}

3. Por la relación entre la tensión V_{AB} a circuito abierto y la corriente I_{AB} con los terminales A y B cortocircuitados, esto es:

$$R_{Th} = \frac{V_{AB}/\text{Circ. abierto}}{I_{AB}/\text{Cortocircuito}}$$

Esto lo podemos explicar a partir de la fig. 3.2.11, donde aparece el equivalente de Thevenin de la red N.

Si cortocircuitamos los terminales A y B tenemos:



$$I_{AB} = I_{AB/CC}$$

$$I_{AB} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

Figura 3.2.11

$$R_{Th} = \frac{V_{Ab}/Ca}{I_{AB}/CC} = \frac{V_{Th}}{I_N}$$

La corriente $I_{AB/CC} = I_N$ es la llamada corriente de Norton, tal como la definiremos cuando estudiemos el teorema de Norton.

Para aplicar este método al circuito de la fig. 3.2.5, es necesario cortocircuitar los terminales A y B, tal como se muestra en la fig. 3.2.12.

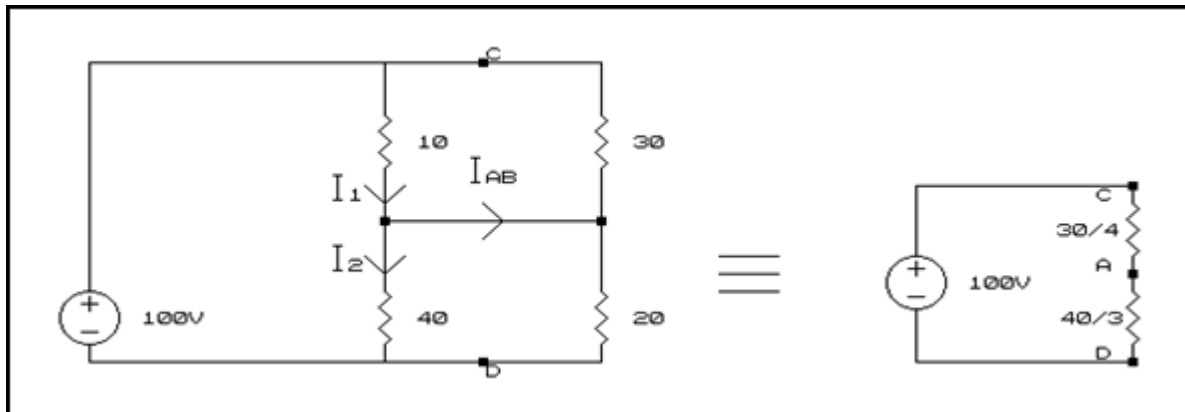


Figura 3.2.12

Luego al aplicar la relación del divisor de tensión, tenemos:

$$V_{CA} = 100 \times \frac{30/4}{30/4 + 40/3} = \frac{100 \times 90}{90 \times 160} = \frac{9000}{160} = 56.25 \text{ V}$$

$$V_{AD} = 100 - 56.25 = 43.75 \text{ V}$$

$$\text{Por lo tanto } I_1 = \frac{56.25}{10} = 5.625 \text{ A}; I_2 = \frac{43.75}{40} = 1.09375 \text{ A}$$

$$\text{Además } I_{AB} = I_1 - I_2 = 4.53125 \text{ A} = I_N$$

$$\text{Aplicando la relación } R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N}; \text{ Tenemos } R_{Th} = \frac{43.75}{4.53125} = 9.65 \Omega$$

Hay algunos circuitos donde es más recomendable un método que los otros dos, esto lo trataremos de clarificar realizando algunos ejercicios.

Consideremos el circuito mostrado en la fig. 3.2.13, donde se pide hallar el valor de i_x .

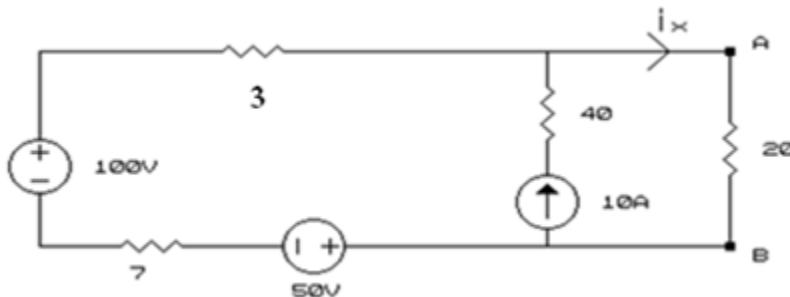


Figura 3.2.1.3

Para encontrar este valor aplicaremos el teorema de Thevenin entre los extremos de la resistencia de 20Ω , tal como se muestra en la fig. 3.2.14.

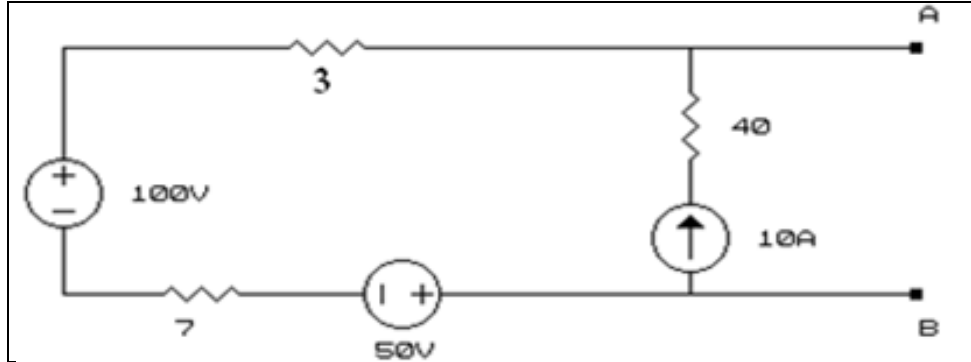


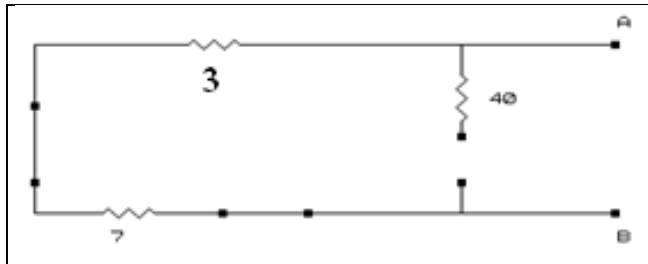
Figura3.2.14

Al abrir los terminales A y B queda una sola malla en la cual circula una corriente de 10 A en el sentido contrario a las agujas del reloj, luego $V_{Th} = V_{AB}$ se calcula así:

$$-V_{Th} + 10 * 3 + 100 + 10 * 7 - 50 = 0$$

$$V_{Th} = 150 \text{ V}$$

Para el cálculo de R_{Th} vamos a utilizar el método 1, que consiste en "pasivizar" la red y hallar luego la resistencia equivalente R_{AB} , tal como se muestra en la fig. 3.2.15.



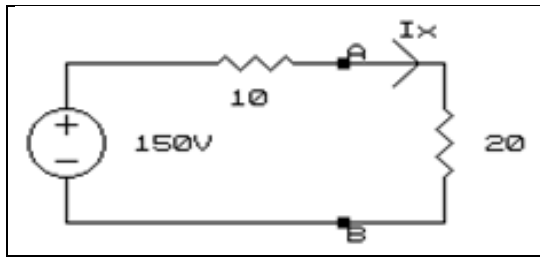
$$R_{AB} = 3 + 7 = 10 \Omega$$

Figura3.2.15

La resistencia de 40Ω tiene uno de sus extremos abierto, luego no influye en el valor de R_{AB} .

Sugerencia 1. El método 1 es conveniente aplicarlo, cuando la red N sólo tiene fuentes independientes y resistencias, a las que se puedan aplicar fácilmente las reducciones serie-paralelo o las transformaciones estrella-triángulo o triángulo-estrella, una vez se halla "pasivizado" dicha red.

Entonces, al reemplazar la red N por el circuito equivalente de Thevenin, tenemos:



$$I_x = \frac{150}{30} = 5 \text{ A}$$

Figura3.2.16

No olvide que la polaridad de la fuente tensión equivalente, V_{Th} , debe ser tal que, produzca en la red equivalente una tensión $V_{AB/ca}$ igual que la tensión $V_{AB/ca}$ en la red N.

Consideremos ahora otro circuito, como el mostrado en la fig. 3.2.17.

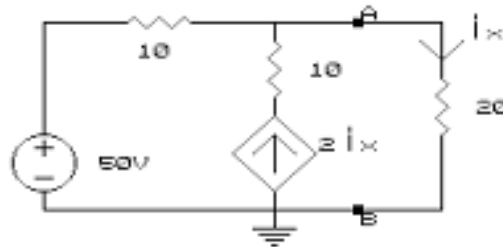
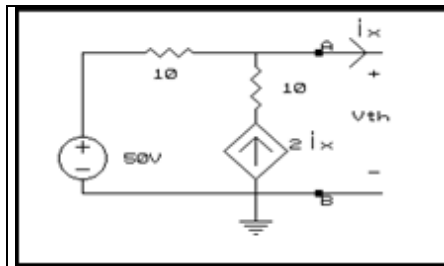


Figura3.2.17

Supongamos que se quiere hallar i_x , para lo cual debemos obtener la red N abriendo en los extremos de la resistencia de 20Ω , quedando el circuito de la fig. 3.2.18.



$$i_x = 0 \text{ circuito abierto}$$

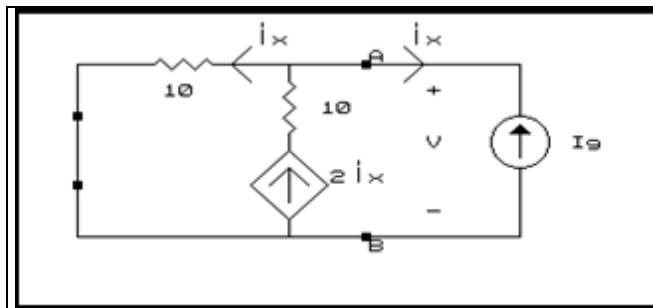
$$2i_x = 0$$

Figura3.2.18

Puesto que $i_x = 0$, al abrir los terminales A y B, se tiene que la corriente en la malla es también cero, luego:

$$V_{AB/ca} = V_{Th} = 50V$$

Para el cálculo de R_{Th} no es recomendable el método 1, puesto que existe una fuente controlada. Vamos a determinar R_{Th} por el método 2, así:



$$i_x = -I_g$$

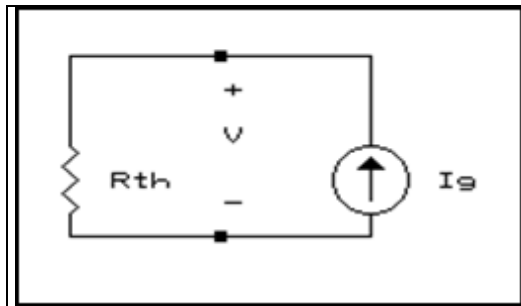
$$2i_x = -2I_g$$

Figura 3.2.19

En la fig. 3.2.19, observemos bien que la Red N está "pasivizada" (lo cual se debe hacer siempre que se quiera aplicar el método 2. No olvide esto!) y que la hemos excitado con una fuente de corriente, puesto que el control de la fuente dependiente es la corriente que circula por la rama AB.

De acuerdo a esto podemos calcular V así:

$$V = 10 * i_x = 10 * (-I_g) = -10I_g$$



$$R_{Th} = \frac{-10I_g}{I_g} = -10 \Omega$$

Figura 3.2.20

Nos dió una resistencia equivalente negativa. Este resultado aparentemente sorprendente se debe a la presencia de la fuente controlada. Así es que si en una red sólo tenemos fuentes independientes y resistencias, es imposible, que la resistencia equivalente de Thevenin R_{Th} sea negativa. Esta observación téngala siempre presente.

La resistencia negativa la podemos interpretar como un elemento que entrega potencia a la red, esto es, como un elemento activo, lo cual se puede deducir de la fig. 3.2.21.

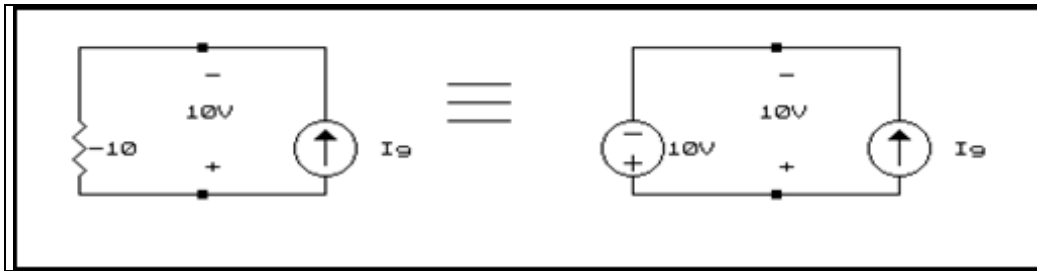


Figura3.2.21

Aquí vemos que la resistencia negativa produce el mismo efecto que una fuente de tensión de 10 V que entrega 10 W a la fuente de corriente $I_g = 1$ A.

R_{Th} también se puede calcular usando el método 3. Para lo cual es necesario calcular la corriente $I_{AB/cc}$, tal como se ilustra en la fig. 3.2.22.

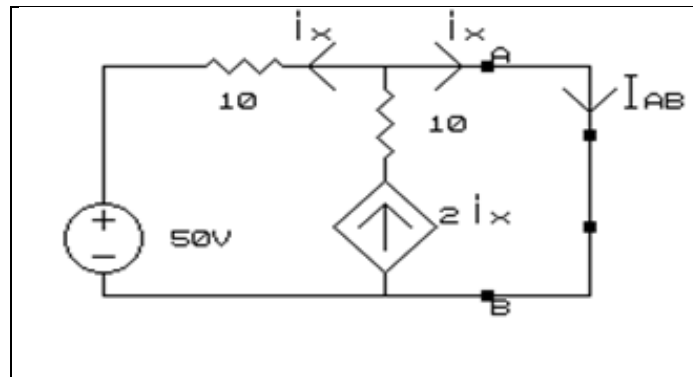


Figura3.2.22

Usando la LTK tenemos:

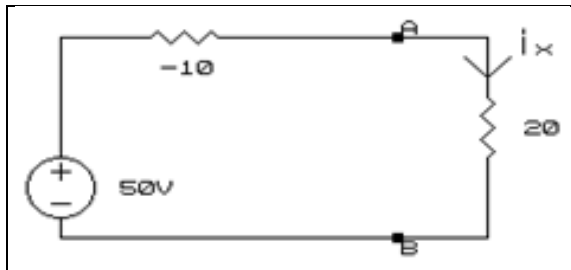
$$10i_x + 50 = 0 \quad \therefore i_x = -\frac{50}{10} = -5 \text{ A}$$

$$I_{AB/cc} = i_x = -5 \text{ A} = I_N$$

$$\text{Luego} \quad R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = -10 \Omega$$

Al aplicar los métodos anteriores para el cálculo de R_{Th} , recuerde siempre que en el método 1 y en el método 2, la red N debe "pasivizarse", **nunca olvide esto** .

Una vez conocido el circuito equivalente de Thevenin podemos calcular i_x .



$$i_x = \frac{50}{20-10} = 5 \text{ A}$$

Figura 3.2.23

Consideremos ahora el circuito de la fig. 3.2.24 donde se pide calcular la potencia en la fuente controlada.

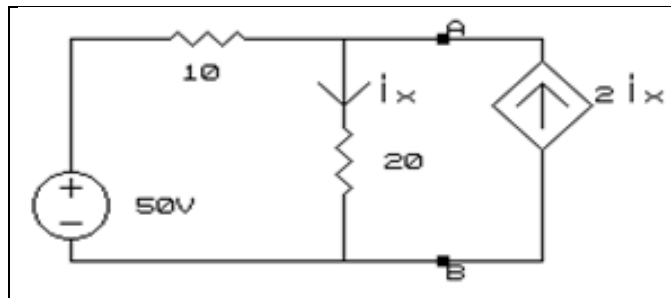


Figura 3.2.24

En este caso no es recomendable aplicar el equivalente de Thevenin, entre los extremos de la fuente controlada, puesto que estamos desligando a la fuente controlada de su variable de control. De todas maneras intentemos su aplicación:

$$V_{AB/ca} = V_{Th}$$

$$V_{Th} = \frac{50 \cdot 20}{30} = \frac{100}{3} \text{ V}$$

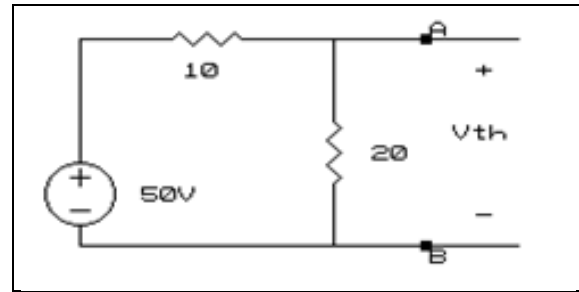
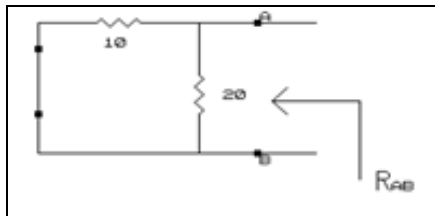


Figura3.2.25

Para el cálculo de R_{Th} , cortocircuitamos la fuente de tensión, quedando:



$$R_{AB} = \frac{10 \cdot 20}{30} = \frac{20}{3} \Omega$$

Figura2.26

Luego al remplazar la red N por su equivalente de Thevenin, tenemos:

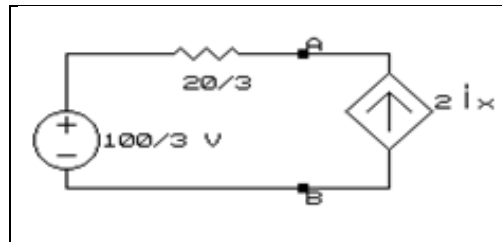
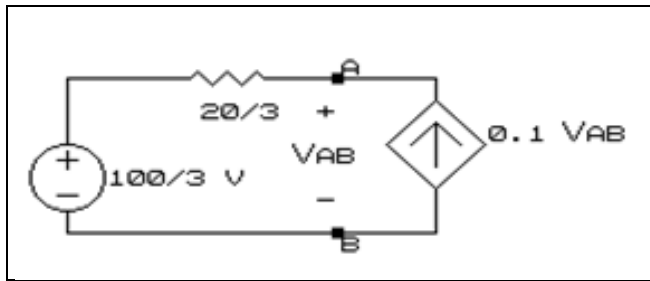


Figura3.2.27

En este circuito no aparece i_x , luego para poder analizarlo, tendríamos que regresar al circuito original donde vemos que:

$$i_x = \frac{V_{AB}}{20}$$

luego es posible cambiar el control, quedando el circuito así:



$$2 \cdot i_x = 2 \cdot \frac{V_{AB}}{20} = \frac{V_{AB}}{10}$$

Figura 3.2.28

Donde se cumple que la corriente en la malla es $V_{AB}/10$ y además:

$$-V_{AB} + \frac{20}{3} \cdot \frac{V_{AB}}{10} + \frac{100}{3} = 0$$

$$\therefore V_{AB} = 100 \text{ V}$$

$$\text{y } 2i_x = 10 \text{ A}$$

luego la fuente controlada entrega una potencia

$$P = 100 \cdot 10 = 1000 \text{ W}$$

En el problema anterior pudimos salirle al paso a la dificultad que se presentó al perder el control. Pero analicemos otros casos para que comprendamos el "por qué" no es recomendable la aplicación del teorema de Thevenin en los extremos de una fuente controlada. Para ello consideremos el circuito de la fig. 3.2.29. Donde se quiere hallar i_x .

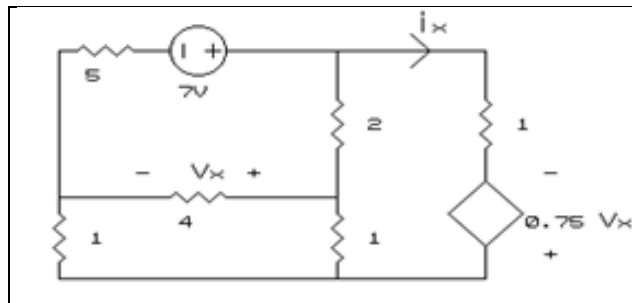


Figura 3.2.29

Apliquemos el teorema de Thevenin en los extremos de la rama donde circula i_x ; luego la red N será:

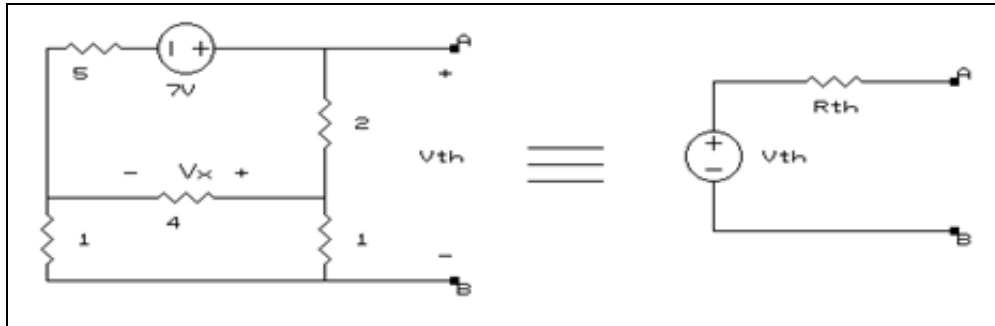


Figura3.2.30

Para calcular i_x tendríamos un circuito como el siguiente:

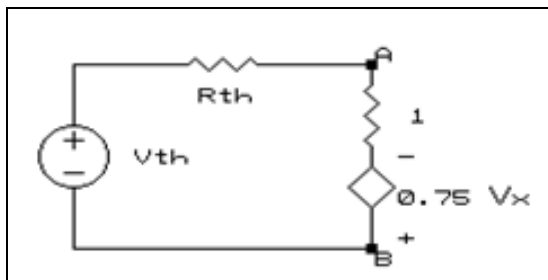


Figura3.2.31

En este caso sería excesivamente laborioso tratar de expresar v_x en función de alguna de las tensiones o corrientes del circuito equivalente mostrado en la fig. 3.2.29, por lo cual no es recomendable la aplicación del teorema de Thevenin.

Consideremos, finalmente, el circuito mostrado en la fig. 3.2.32, donde se pide hallar la potencia disipada por la resistencia de 55Ω .

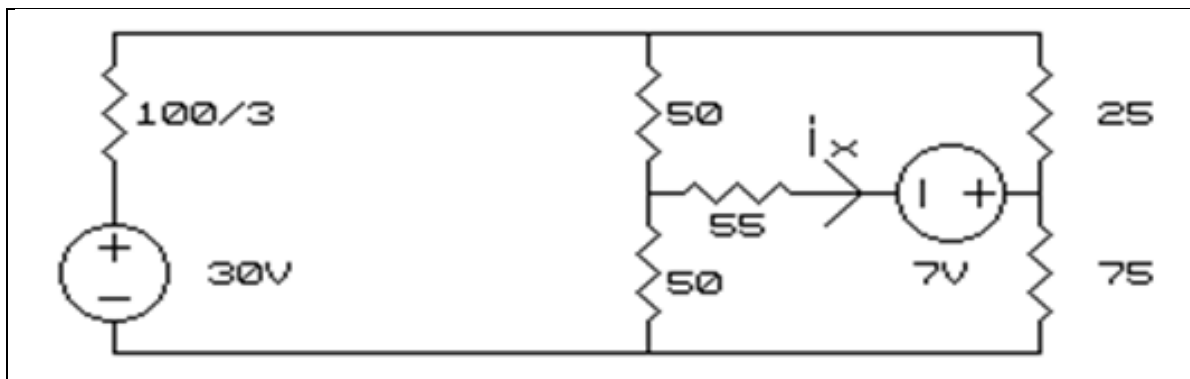


Figura3.2.32

Separemos primero la red N, que vamos a remplazar por su equivalente de Thevenin.

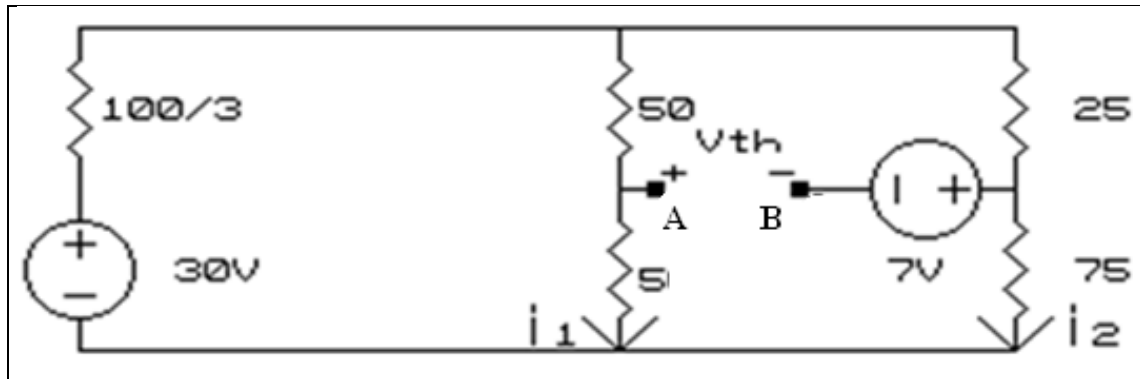


Figura3.2.33

Para el cálculo de V_{Th} , debemos calcular los valores de i_1 e i_2 , (ver fig. 3.2.33) en las cuales no influye la fuente de tensión de 7V puesto que está abierta.

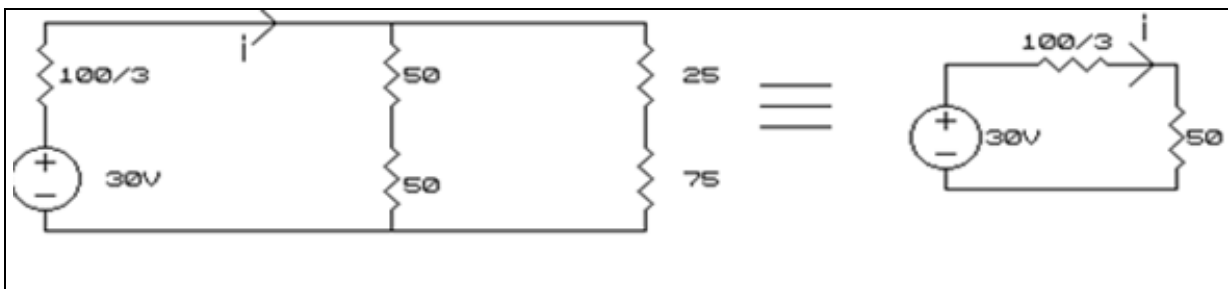


Figura3.2.34

$$i = \frac{30}{250/3} = \frac{9}{25} \text{ A}$$

$$i_1 = i_2 = \frac{9}{50} \text{ A}$$

Para calcular V_{Th} miremos, la fig. 3.2.33, donde:

$$v_{Th} - 7 + i_2 * 75 - i_1 * 50 = 0$$

luego $v_{Th} = 2,5 \text{ V}$.

Observe detenidamente que la fuente de 7 V no influye en el cálculo de i_1 e i_2 pero sí influye en el valor de V_{Th} .

Puesto que no hay fuentes controladas, podemos aplicar el método 1 para hallar R_{Th} . Pero es necesario aplicar la transformación estrella-triángulo o triángulo-estrella. Esta resistencia equivalente fue hallada en un ejercicio del capítulo 1, donde se obtuvo:

$$R_{Th} = 45 \Omega$$

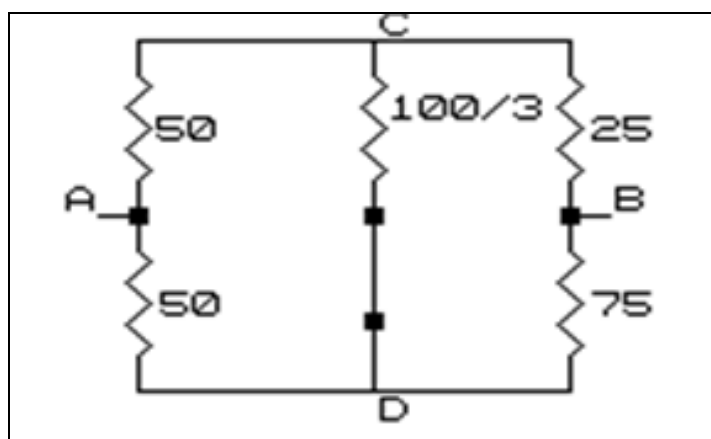


Figura3.2.35

El circuito equivalente final quedará así:

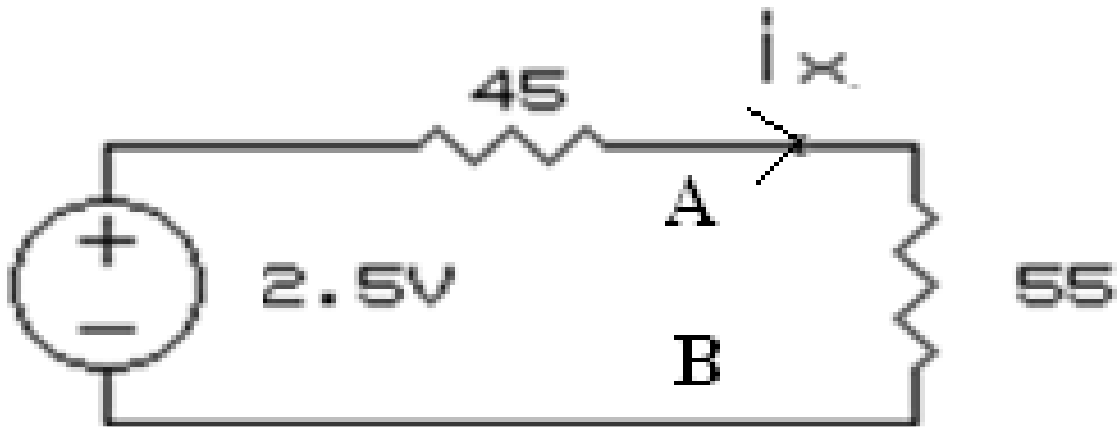


Figura3.2.36

donde
$$i = \frac{2,5}{100} = 25 \text{ mA}$$

3.3 Teorema de Norton

Cuando estudiamos el teorema de Thevenin, vimos que la red N de la fig. 3.2.1, se podía remplazar por una fuente real de tensión equivalente de Thevenin. Si transformamos esta fuente real de tensión, en una fuente real de corriente, obtenemos el circuito equivalente de Norton, tal como se muestra en la fig. 3.3.1.

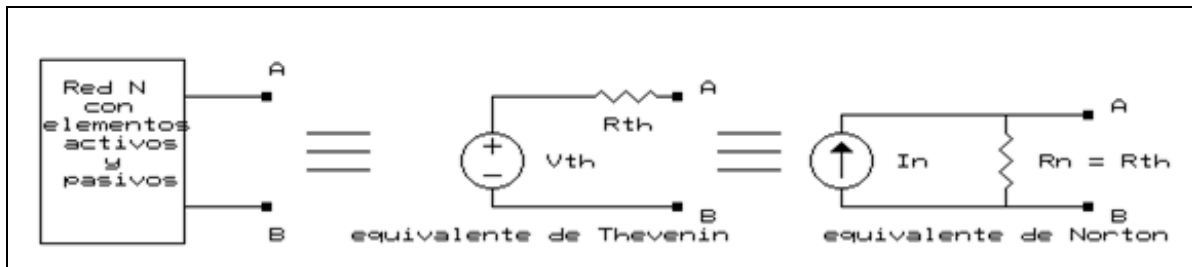


Figura3.3.1

Luego el teorema de Norton establece que una red cualquiera puede remplazarse por una fuente ideal de corriente equivalente I_N , en paralelo con una resistencia equivalente R_N (nuevamente recuerde que estamos analizando, hasta ahora, circuitos con fuentes de tensión y corriente y con resistencias).

La corriente equivalente, es la corriente que circula entre los terminales A y B una vez estos han sido cortocircuitados, tal y como se mencionó en el estudio del teorema de Thevenin.

La resistencia equivalente de Norton es igual a la resistencia equivalente de Thevenin, luego los métodos de cálculo son los mismos vistos en el teorema de Thevenin.

Los teoremas de Thevenin y de Norton son teoremas de mucha utilidad en el análisis de circuitos electrónicos lineales, razón por la cual vamos a desarrollar una serie numerosa de ejemplos, que esperamos deje clara su aplicación.

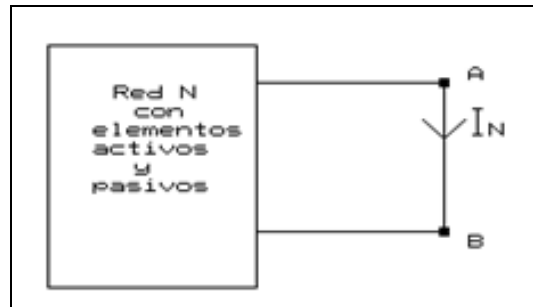


Figura3.3.2

Antes de iniciar con la solución de los ejemplos le recomendamos que siempre tenga presente las siguientes figuras, para que no se equivoque con la polaridad en los circuitos equivalentes:

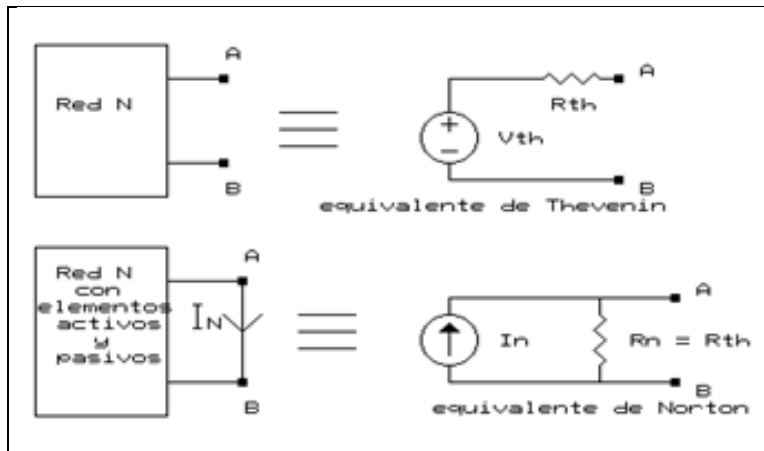


Figura3.3.3

Ejemplo 3.3.1. Calcule i_y en el circuito de la fig. 3.3.4.

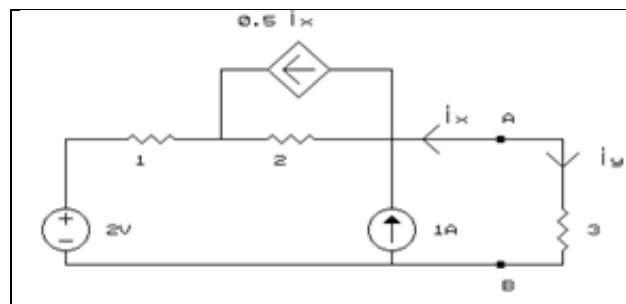


Figura3.3.4

Para calcular el circuito equivalente de Thevenin abrimos los terminales A y B, así:

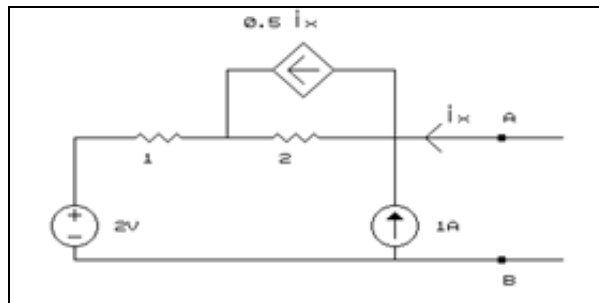


Figura3.3.5

Como i_x se hace cero, tenemos:

$$-V_{Th} + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$V_{Th} = 5 \text{ V}$$

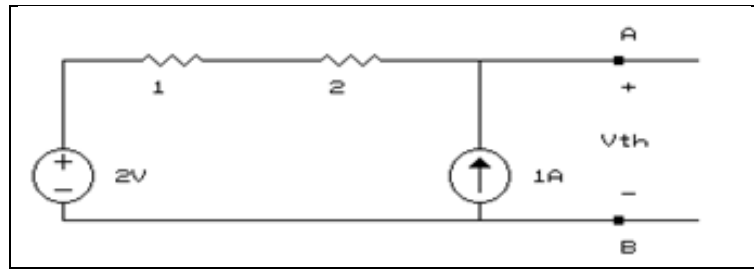


Figura3.3.6

Como el circuito en estudio tiene fuentes controladas y queremos ilustrar el cálculo de I_N , tenemos:

$$i_x = -I_N$$

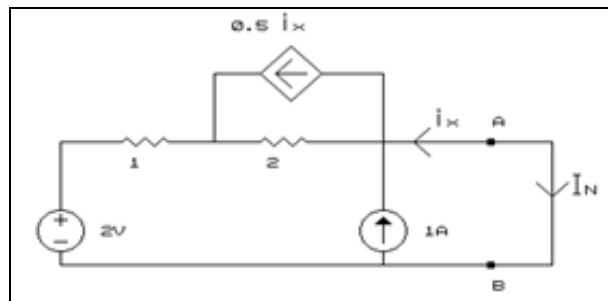


Figura3.3.7

El análisis del circuito se simplifica si transformamos la fuente controlada de corriente en una fuente controlada de tensión y luego calculamos I_N .

$$I_N - I_1 = 1$$

$$\therefore I_1 = I_N - 1$$

$$-2 + 3I_1 - I_N = 0$$

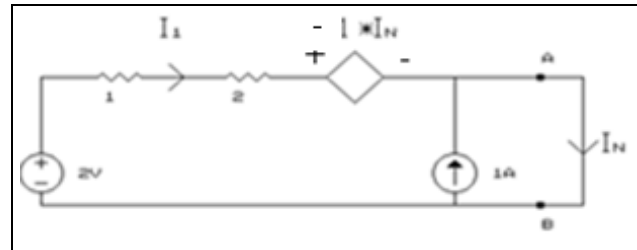


Figura3.3.8

Luego tenemos

$$3(I_N - 1) - I_N = 2$$

$$2I_N = 5 \quad \therefore \quad I_N = 2,5 \text{ A}$$

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{5}{2,5} = 2 \Omega$$

Luego el circuito equivalente quedará así:

$$i_y = \frac{5}{5} = 1 \text{ A}$$

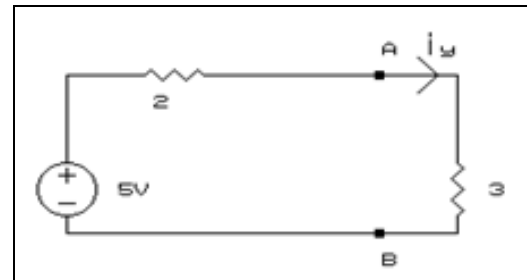


Figura3.3.9

También lo hubiéramos podido calcular usando el circuito equivalente de Norton así:

$$i_y = \frac{2,5 \cdot 2}{5} = 1 \text{ A}$$

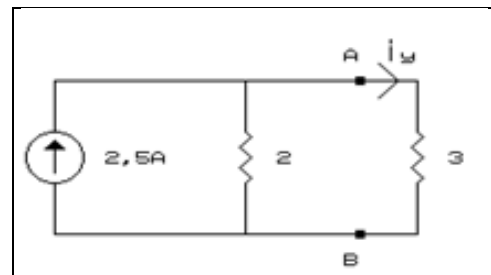


Figura3.3.10

Ejemplo 3.3.2: Calcular v_x en el circuito mostrado en la fig. 3.3.11.

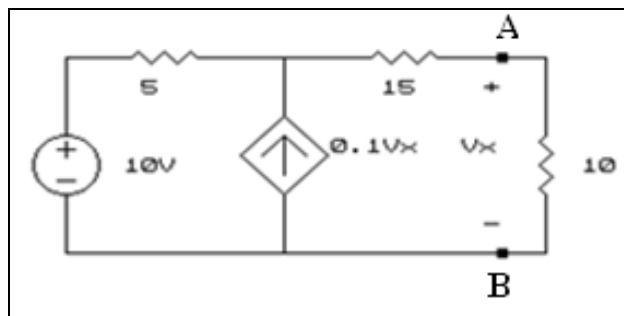


Figura3.3.11

Cálculo de V_{Th} :

Al abrir el circuito entre A y B, no circula ninguna corriente en la resistencia de 15Ω , luego $v_x = V_{Th}$ y es igual a la tensión en la fuente controlada de corriente. En la única malla existente circulará una corriente de $0,1 \cdot v_x$, y por lo tanto al aplicar la LTK tendremos:

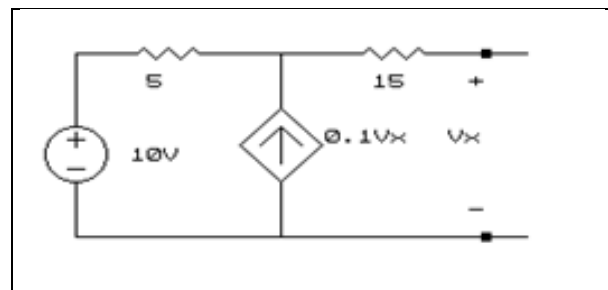


Figura3.3.12

$$-v_x + 0,1v_x \cdot 5 + 10 = 0$$

$$-\frac{1}{2} v_x = -10 \therefore v_x = 20 \text{ V} = V_{Th}$$

Cálculo de I_N

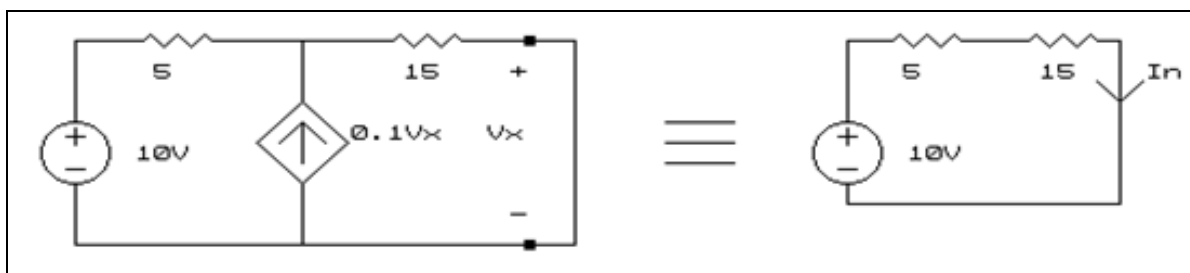
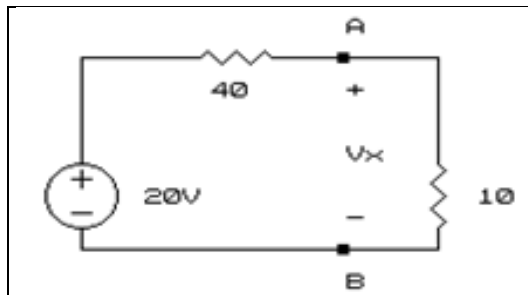


Figura3.3.13

$$I_N = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{ A}$$

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{20}{0,5} = 40 \Omega$$

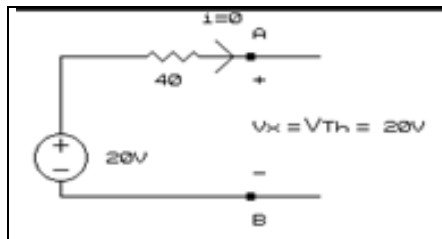
El circuito equivalente quedará así:



$$V_x = \frac{20 \cdot 10}{50} = 4 \text{ V}$$

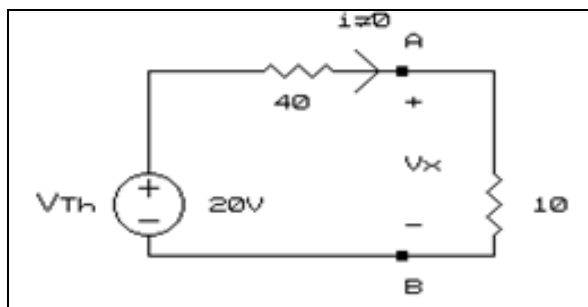
Figura3.3.14

Un error que se comete con mucha frecuencia es decir que $v_x = V_{Th}$, lo cual es falso, puesto que, por definición, V_{Th} es la tensión entre A y B, pero cuando los terminales están abiertos, lo cual hace que la corriente en el circuito equivalente sea cero y por lo tanto v_x sea igual a V_{Th} (ver fig.3.3.15).



$$v_x = V_{Th} = 20 \text{ V} \quad \text{circuito abierto } i = 0$$

Figura3.3.15



v_x diferente de V_{Th} , puesto que hay una caída de tensión en la resistencia $R_{Th} = 40 \Omega$.

Figura3.3.16

Ejemplo 3.3.3 Hallar el circuito equivalente de Thevenin, para la red vista por R_c .

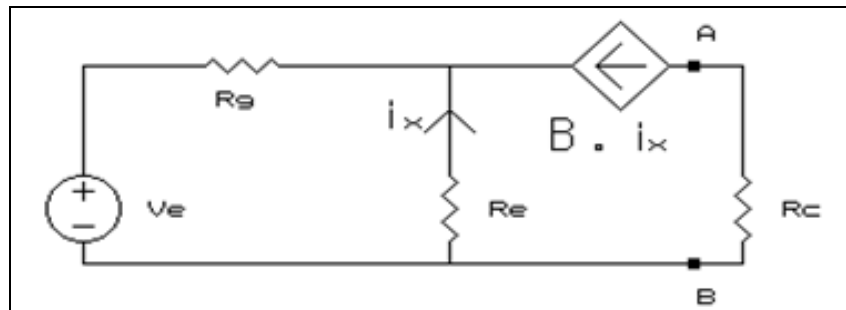


Figura 3.3.17

Calculo de V_{Th}

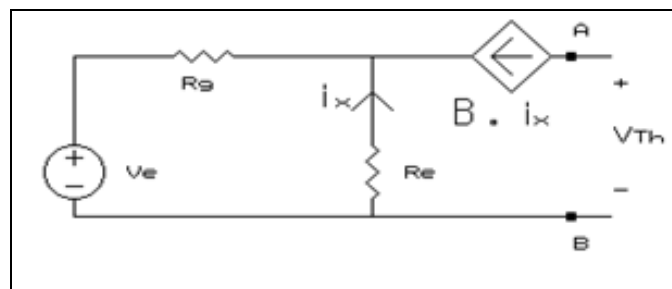


Figura 3.3.18

Puesto que la rama R_c , donde se quiere determinar el circuito equivalente de Thevenin, está en serie con una fuente de corriente $B I_x$ la tensión V_{Th} la debemos calcular como un proceso de límite así:

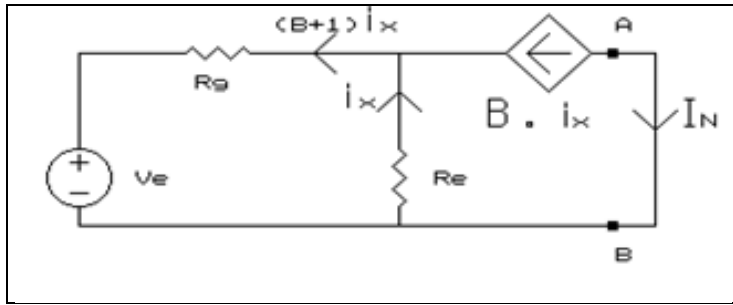
$$V_{Th} = V_{AB/ca} = \lim_{R_c \rightarrow \infty} B I_x R_c$$

Al tener R_c a un valor infinito quiere decir que se abre el circuito entre A y B cuando se alcanza este límite y por lo tanto:

$$V_{Th} \rightarrow \infty$$

Esto siempre ocurrirá, cuando estemos hallando la tensión equivalente de Thevenin en una rama que esté en serie con una fuente de corriente.

Cálculo de I_N



$$I_N = -BI_x \therefore I_x = -\frac{I_N}{B}$$

$$-V_g - R_g(B+1)I_x - I_x R_e = 0$$

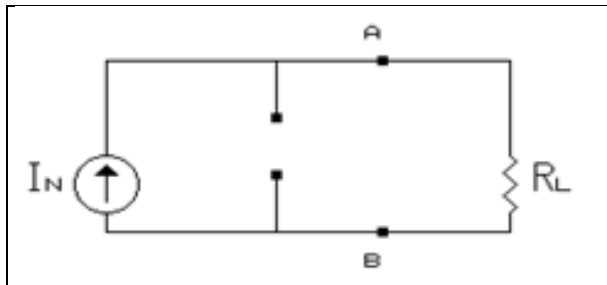
$$-V_g + \frac{B+1}{B} * I_N R_g + \frac{R_e}{B} I_N = 0$$

$$I_N * \frac{(B+1)R_g + R_e}{B} = V_g$$

Figura 3.3.19

$$\therefore I_N = \frac{BV_g}{(B+1)R_g + R_e} \quad R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \infty$$

En este caso no tiene sentido hablar de un circuito equivalente de Thevenin ($V_{Th} \rightarrow \infty$), y el circuito equivalente de Norton corresponderá a una fuente ideal de corriente I_N , tal como se ilustra a continuación:



$$I_N = \frac{BV_g}{(B+1)R_g + R_e}$$

$$R_N = \infty \text{ (circuito abierto)}$$

Figura 3.3.20

$I_N = I_{AB/cc} = I_{AB}$ del circuito original (único caso donde esto ocurre puesto que $R_N = \infty$).

Ejemplo 3.3.4. Hallar potencia en la resistencia de $R_c = 20 \Omega$ de la fig. 3.3.21.

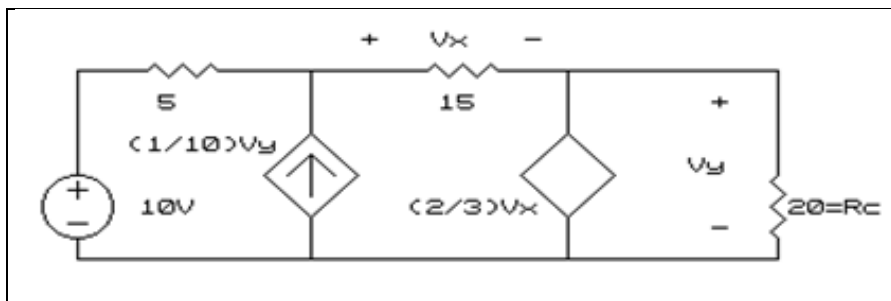


Figura 3.3.21

Cálculo de V_{Th}

$$v_1 = 10 \text{ V}$$

$$v_3 = -\frac{2}{3}v_x$$

$$v_2 = v_x + \frac{2}{3}v_x = \frac{5}{3}v_x$$

$$v_y = V_{Th} = \frac{2}{3}v_x$$

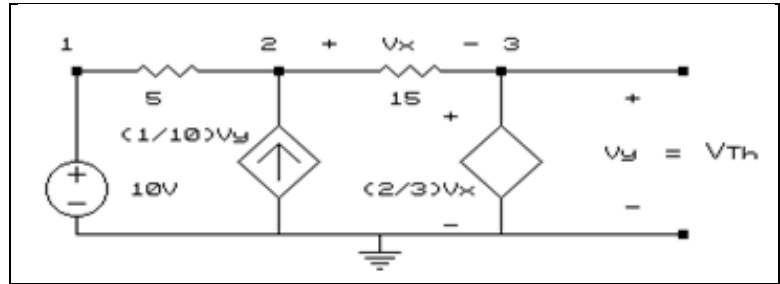


Figura3.3.22

Apliquemos la LCK en el nudo 2

$$-v_1 * \frac{1}{5} + v_2 * \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{15}\right) - v_3 * \frac{1}{15} - v_y * \frac{1}{10} = 0$$

Al hacer los remplazos correspondientes, tenemos:

$$v_x = 6 \text{ V} \quad v_y = V_{Th} = -v_x = 4 \text{ V}$$

Cálculo de I_N

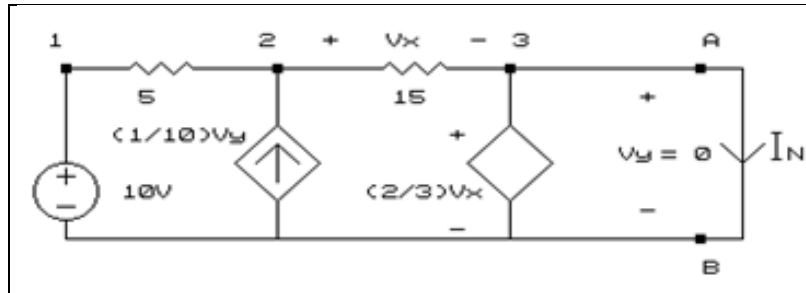


Figura3.3.23

Puesto que la rama AB donde se quiere calcular la corriente de Norton, está en paralelo con una fuente de tensión $\frac{2}{3}v_x$, para calcular I_N debemos aplicar un proceso de límite.

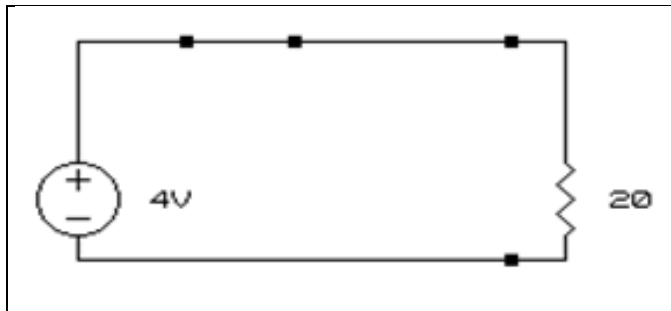
$$I_N = I_{AB/cc} = \lim_{R_c \rightarrow 0} \frac{(\frac{2}{3})v_x}{R_c}$$

Al tender R_c a cero quiere decir que los terminales A y B se tienden a cortocircuitar ($R_c \rightarrow 0$) y por lo tanto $I_N \rightarrow \infty$

Esto siempre ocurrirá, cuando estemos hallando la corriente equivalente de Norton I_N , en una rama que está en paralelo con una fuente ideal de tensión.

$$\text{Ahora } R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = 0 \Omega$$

En este caso no tiene sentido hablar de un circuito equivalente de Norton ($I_N \rightarrow \infty$), y el circuito equivalente de Thevenin será una fuente ideal de tensión, puesto que $R_{Th} = 0$.



Luego la potencia en $R_c = 20 \Omega$ será:

$$P = 0,8W$$

Figura3.3.24

Por ser $R_{Th} = 0$ la tensión en la resistencia de carga es igual a V_{Th} (recuerdo que es el único caso donde $V_{Th} = V_{AB/ca} = V_{AB}/\text{del circuito original}$).

Ejemplo 3.3.5 Hallar i_x en el circuito siguiente:

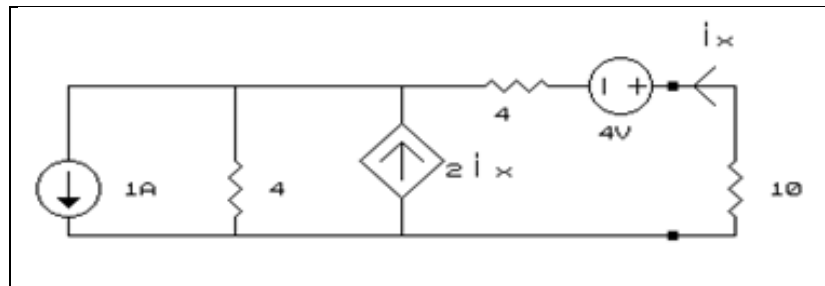


Figura3.3.25

Cálculo de V_{Th}

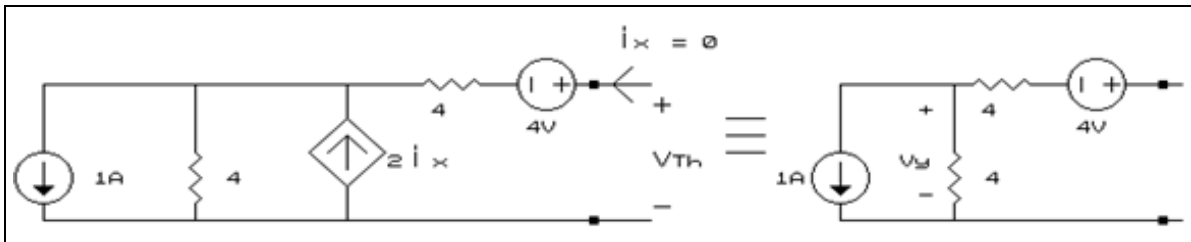
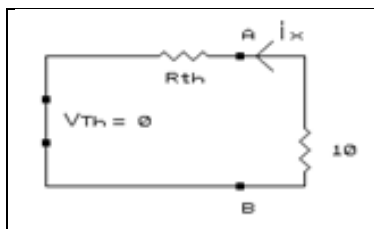


Figura3.3.26

$$V_y = -4 * 1 = -4 \text{ V}$$

$$-V_{Th} + 4 - 4 = 0 \quad \therefore \quad V_{Th} = 0$$

La fuente equivalente de Tensión $V_{Th} = 0$, luego no es necesario calcular R_{Th} para calcular i_x , puesto que el circuito equivalente quedaría así:



$i_x = 0$ puesto que no hay ninguna fuente independiente.

(Demuestre que $R_{Th} = 16 \Omega$)

Figura3.3.27

Ejemplo 3.3.6. Hallar el equivalente de Thevenin entre los terminales A y B (red vista por la fuente de tensión).

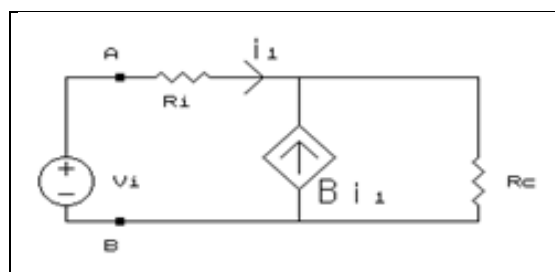
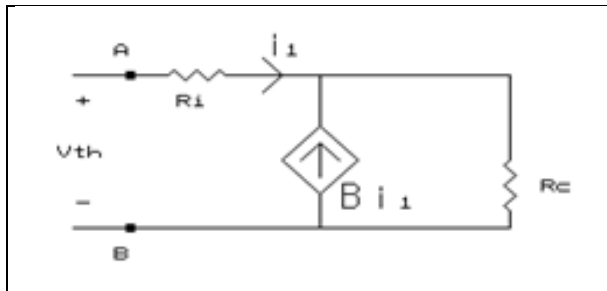


Figura3.3.28

Cálculo de V_{Th}



Puesto que no existe ninguna fuente independiente, las corrientes y tensiones en el circuito son nulas.

Luego $V_{Th} = 0$.

$I_N = 0$, por la misma razón anterior.

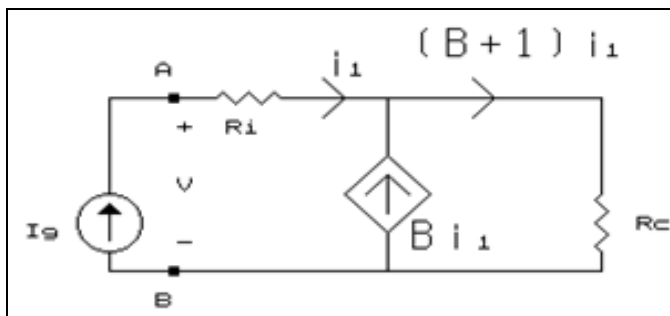
Figura3.3.29

Cálculo de R_{Th} :

En este caso no podemos calcular R_{Th} por simple reducción de resistencias, puesto que existe una fuente controlada, tampoco podemos calcular R_{Th} por el método 3.

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_N} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminación)}$$

Luego solo podremos usar el método 2, así



$$i_1 = I_g$$

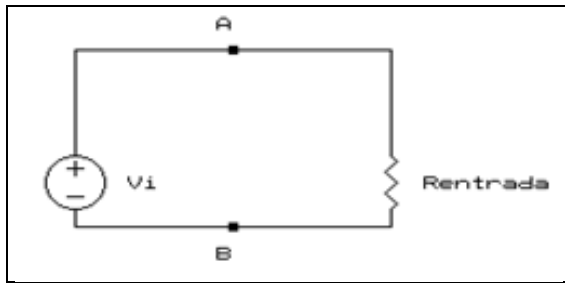
$$-V + I_g * R_i + (B+1) * I_g * R_c = 0$$

$$\therefore V = (R_i + (B + 1) * R_c) I_g$$

$$R_{Th} = \frac{V}{I_g} = R_i + (B + 1) R_c$$

Figura3.3.30

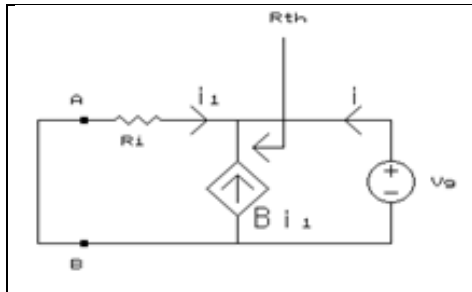
La resistencia de Thevenin encontrada en este problema es la que se conoce con el nombre de **resistencia de entrada** del circuito, puesto que yo puedo reemplazar la red por una $R_{equivalente} = R_{Th}$, quedando el circuito final así:



$$R_{\text{entrada}} = R_{\text{Th}} = R_i + (B + 1)R_c$$

Figura3.3.31

La llamada **resistencia de salida** es la resistencia equivalente de Thevenin vista entre un par de nudos, llamados nudos de salida de la red; normalmente a estos nudos se conecta una resistencia llamada resistencia de carga. Por ejemplo en la fig. 3.3.30, podemos considerar a R_c , como la resistencia de carga y se puede hallar la resistencia de salida, que sería la R_{Th} vista por R_c , esto es:



$$R_{\text{Th}} = V_g/i$$

$$i_1 = -V_g/R_i \quad i = -(B + 1)i_1$$

$$i = \frac{(B + 1)V_g}{R_i}$$

Figura3.3.32

$$\therefore R_{\text{Th}} = V_g/i = \frac{R_i}{(B+1)} = R_{\text{salida}}$$

Ejemplo 3.3.7: Hallar i_B en el circuito de la fig. 3.3.33, usando el teorema de Norton.

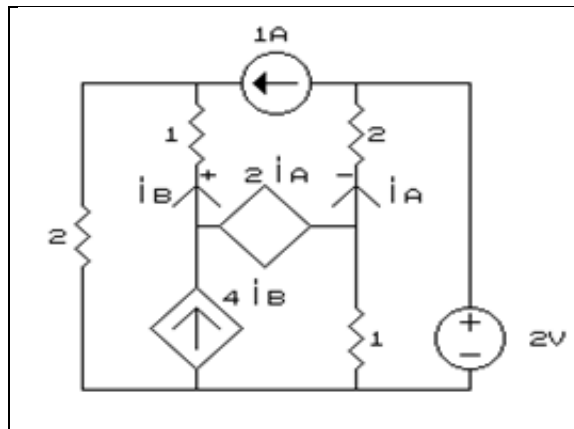


Figura3.3.33

Cálculo de V_{Th}

$$i_A = -\frac{2}{3} A$$

$$2i_A = -\frac{4}{3} V$$

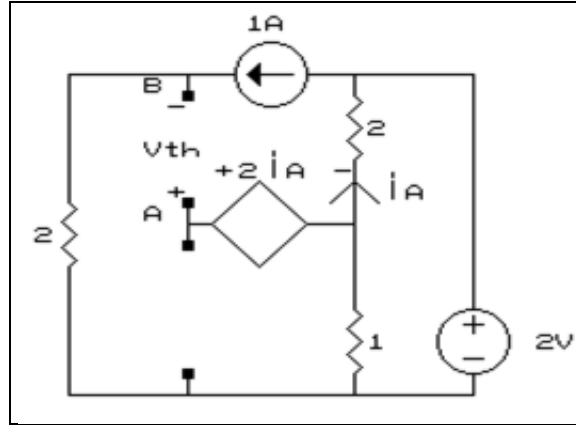


Figura3.3.34

$$+ V_{Th} + 2 - \frac{2}{3} - 2i_A = 0 \quad \therefore V_{Th} = -\frac{8}{3} V$$

Cálculo de I_N

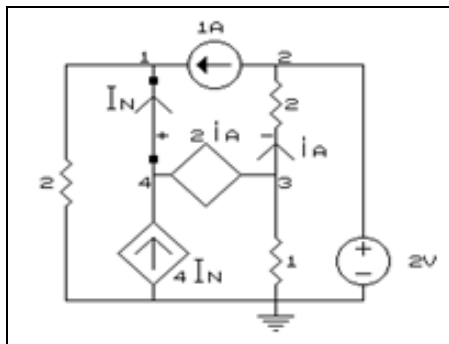


Figura3.3.35

$$v_1 = v_4$$

$$v_2 = 2 V$$

$$v_1 - v_3 = 2i_A = 2 * \frac{(v_3 - 2)}{2}$$

$$v_1 (\frac{1}{2}) - 1 - 4 I_N - i_g = 0$$

$$v_3 (\frac{1}{2} + 1) - 2(\frac{1}{2}) + i_g = 0$$

$$v_1 (\frac{1}{2}) + v_3 (\frac{3}{2}) - 2 - 4I_N = 0$$

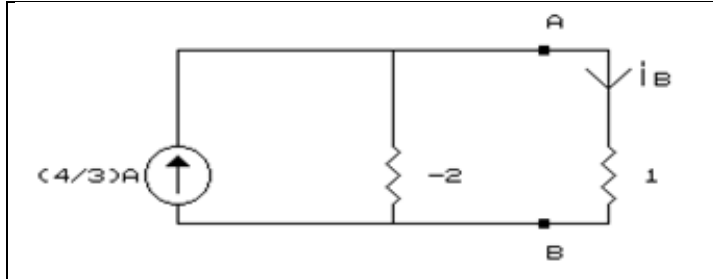
Como I_N es el control de la fuente controlada de corriente debemos expresar este valor en función de las tensiones de nudos (incógnitas elegidas para resolver el problema)

$$v_1 = (1 + I_N) * 2 \quad \therefore I_N = \frac{v_1 - 2}{2}$$

Al hacer los reemplazos correspondientes y resolver las ecuaciones se obtiene:

$$v_1 = \frac{14}{3} V \quad v_3 = \frac{10}{3} V \quad I_N = \frac{4}{3} A \quad R_{Th} = -2$$

El circuito equivalente quedará así:



$$i_B = \frac{4}{3} * \frac{(-2)}{(1-2)} = \frac{8}{3} A$$

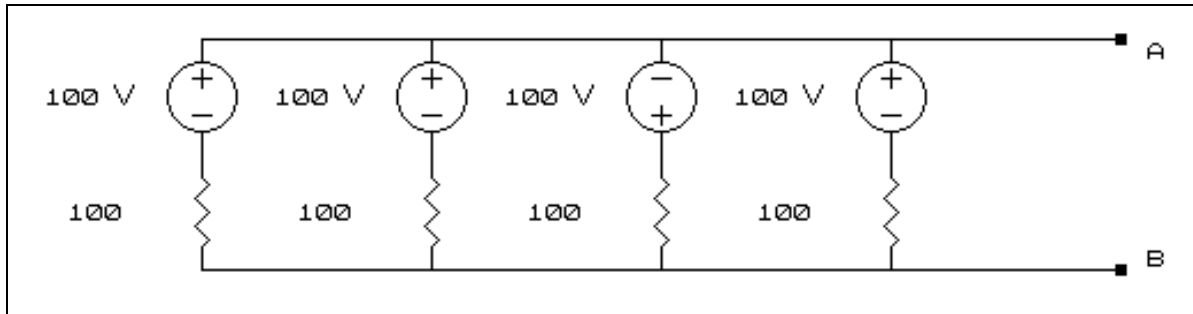
Figura3.3.36

Fíjese bien en la aplicación de la relación del divisor de corriente en el último problema, donde resultó una $R_{Th} = R_N = -2 \Omega$ (negativa).

Ejercicios

Hallar los circuitos equivalentes de Thevenin y Norton en los circuitos siguientes:

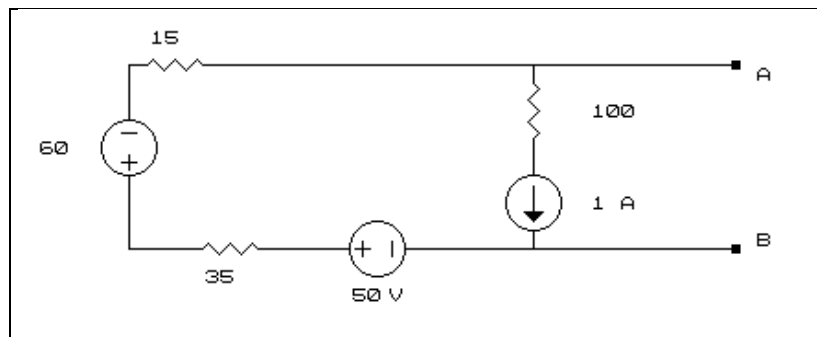
1)



FiguraP.3.1

$$V_{Th}=50 \text{ V} \quad I_N=2 \text{ A} \quad R_{Th}=25 \text{ } \Omega$$

2)



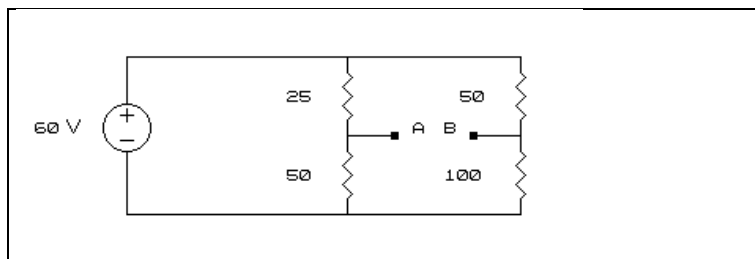
FiguraP.3.2

$$V_{Th} = -60 \text{ V}$$

$$I_N = -1,2 \text{ A}$$

$$R_{Th} = 50 \text{ } \Omega$$

3)



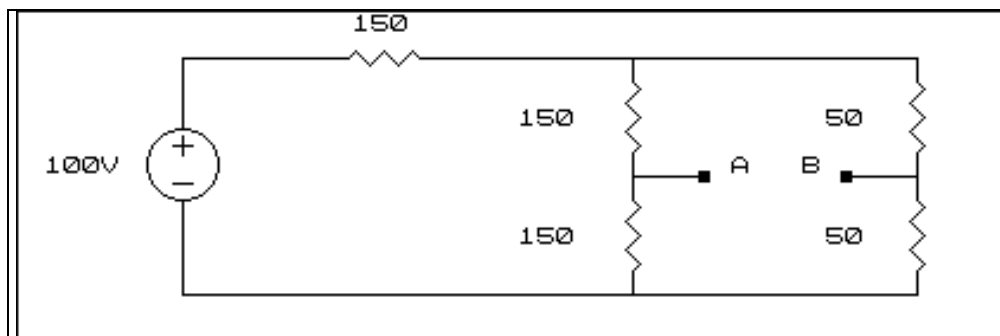
$$V_{Th} = 0$$

$$I_N = 0$$

$$R_{Th} = 50 \Omega$$

FiguraP.3.3

4)



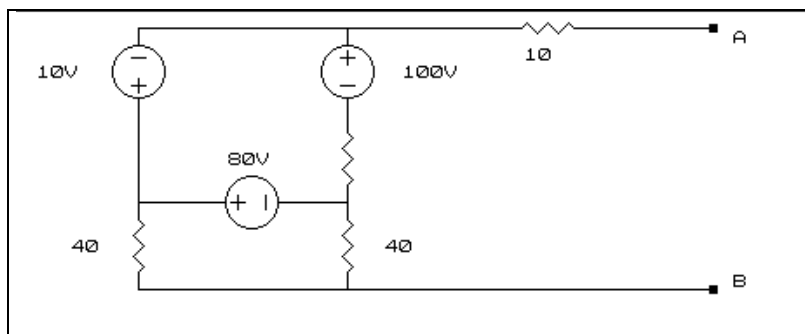
$$V_{Th} = 0$$

$$I_N = 0$$

$$R_{Th} = 100 \Omega$$

FiguraP.3.4

5)



$$V_{Th} = 30 \text{ V}$$

$$I_N = 1 \text{ A}$$

$$R_{Th} = 30 \Omega$$

FiguraP.3.5

6)

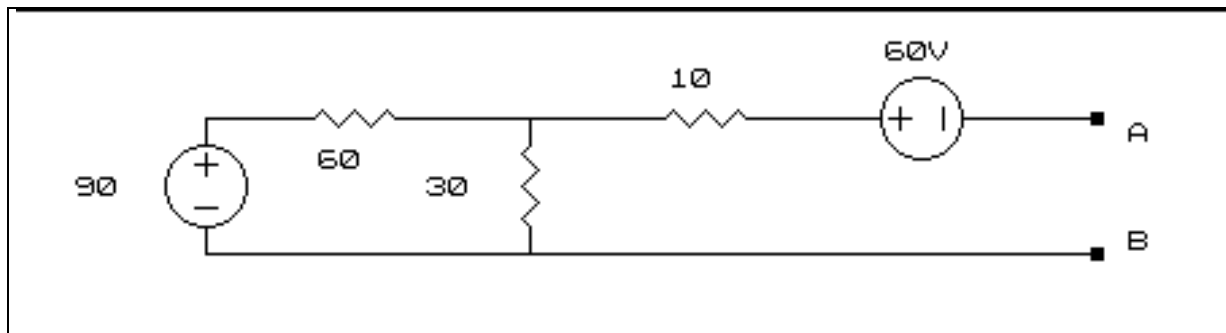


Figura P.3.6

$$V_{Th} = -30 \text{ V} \quad I_N = -1 \text{ A} \quad R_{Th} = 30 \text{ } \Omega$$

7)

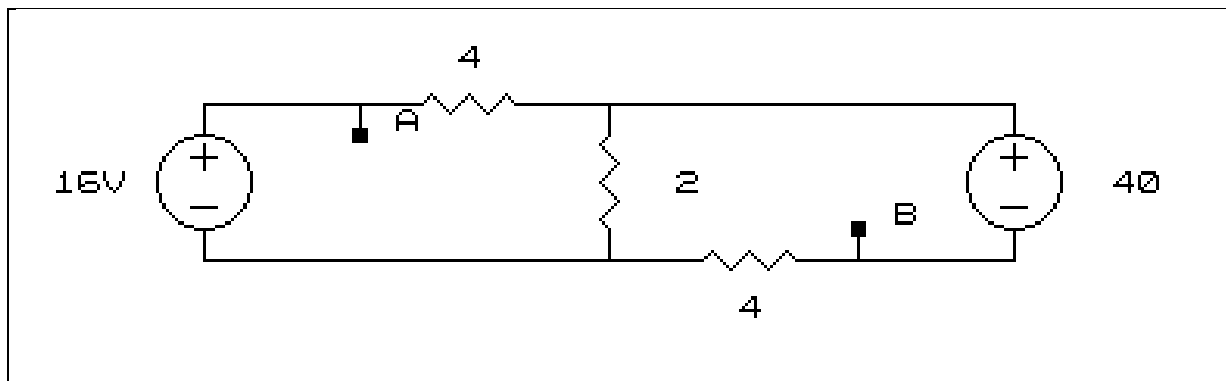


Figura P.3.7

$$V_{Th} = 42 \text{ V} \quad I_N = 42 \text{ A} \quad R_{Th} = 1 \text{ } \Omega$$

8)

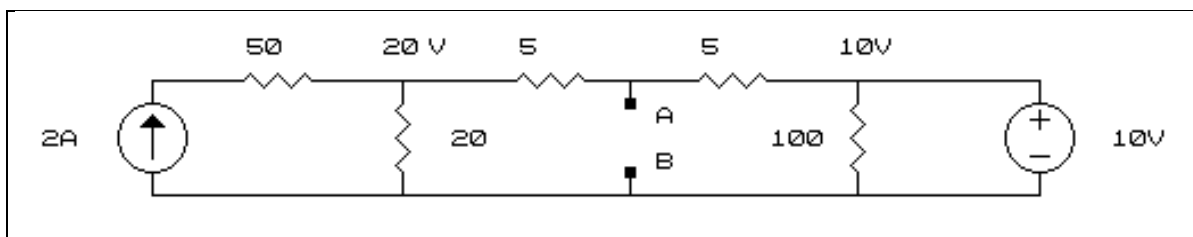


Figura P.3.8

$$V_{Th} = 15 \text{ V} \quad I_N = 18/5 \text{ A} \quad R_{Th} = 25/6 \text{ } \Omega$$

9)

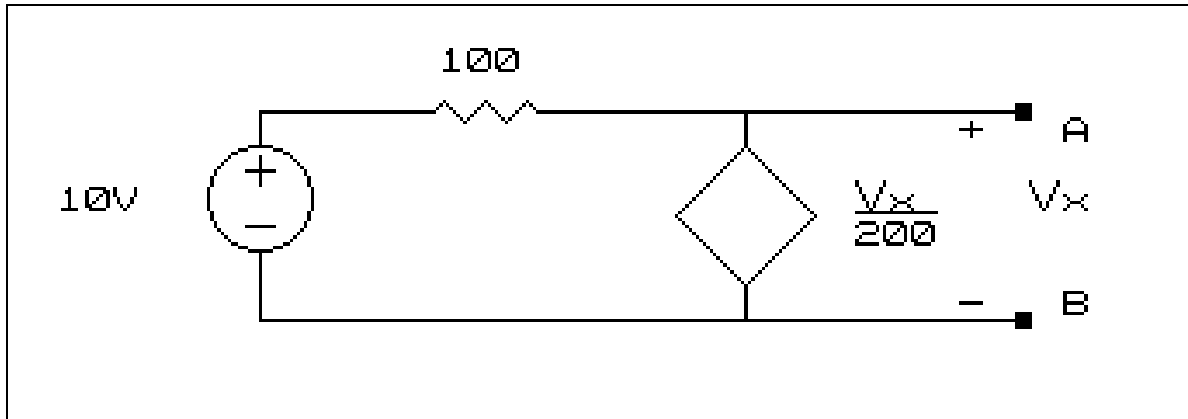


Figura P.3.9

$$V_{Th} = 20 \text{ V} \quad I_N = 1/10 \text{ A} \quad R_{Th} = 200 \ \Omega$$

10)

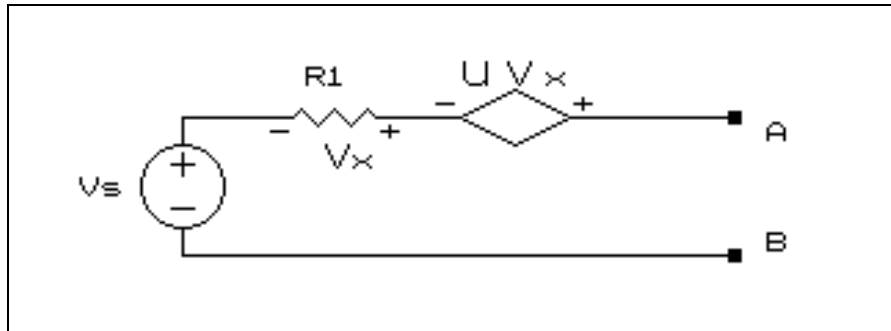


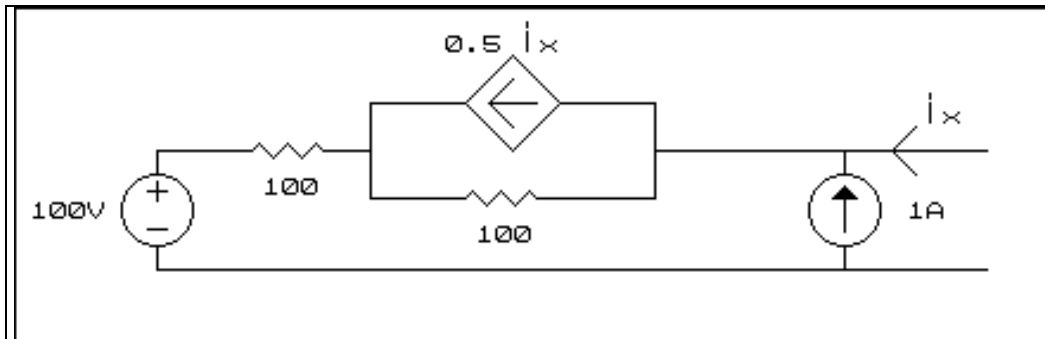
Figura P.3.10

$$V_{Th} = V_1$$

$$I_N = \frac{V_1}{(\mu + 1)R_1}$$

$$R_{Th} = (\mu + 1)R_1$$

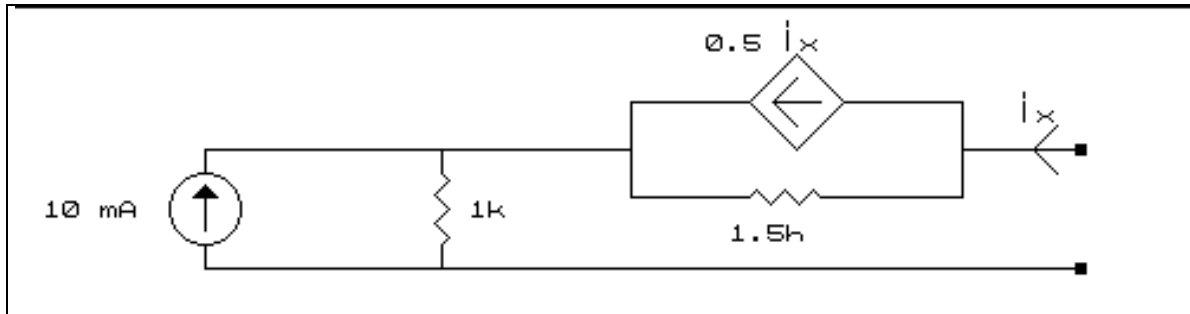
11)



FiguraP.3.11

$$V_{Th} = 300 \text{ V} \quad I_N = 2 \text{ A} \quad R_{Th} = 150 \text{ } \Omega$$

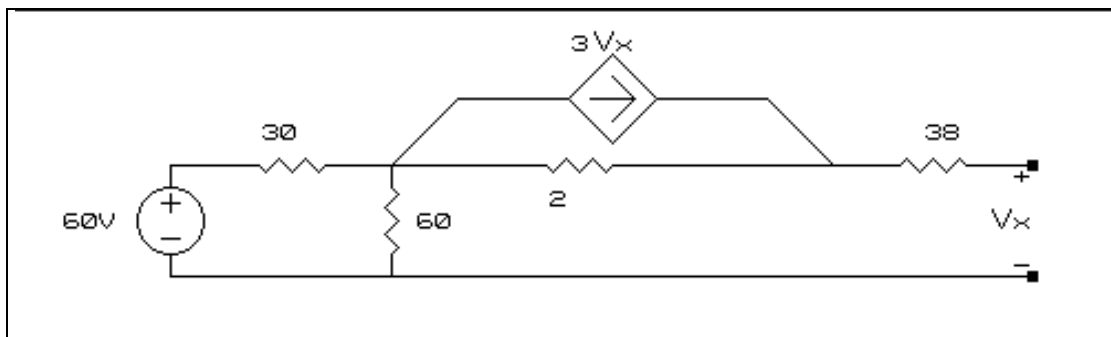
12)



FiguraP.3.12

$$V_{Th} = 10 \text{ V} \quad I_N = \frac{1}{175} \text{ A} \quad R_{Th} = 1,75 \text{ k}\Omega$$

13)



FiguraP.3.13

$$V_{Th} = -8 \text{ V} \quad I_N = \frac{2}{3} \text{ A} \quad R_{Th} = -12 \text{ } \Omega$$

14)

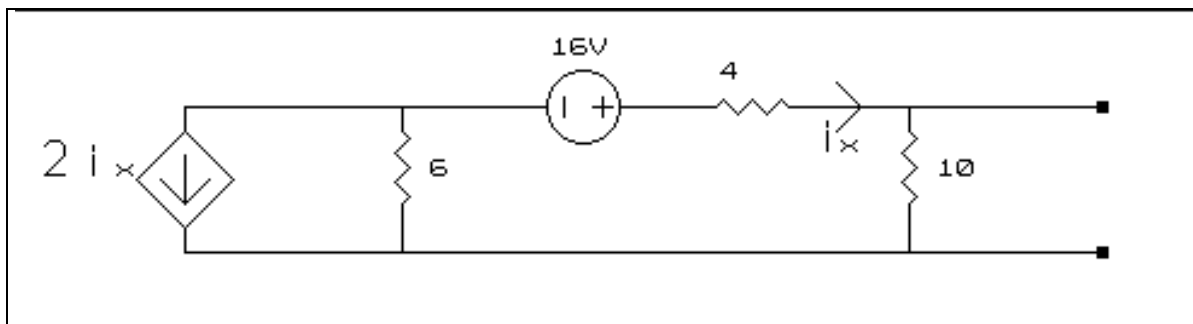


Figura P.3.14

$$V_{Th} = 5 \text{ V} \quad I_N = (8/11) \text{ A} \quad R_{Th} = (55/8) \text{ } \Omega$$

15)

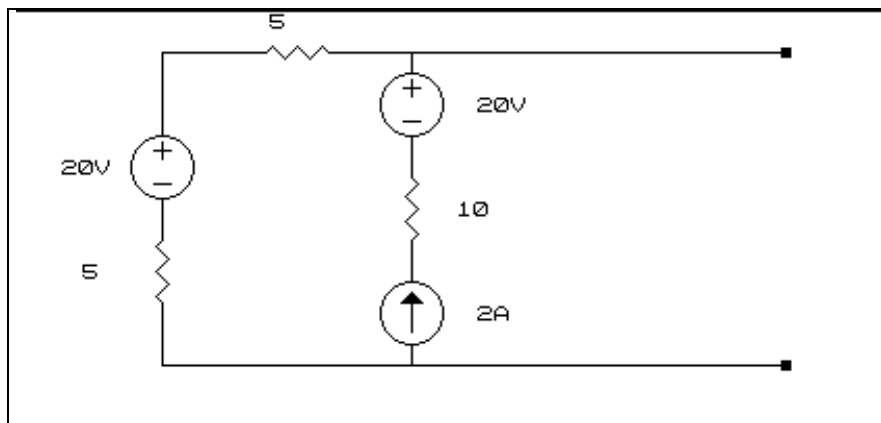


Figura P.3.15

$$V_{Th} = 40 \text{ V}$$

$$I_N = 4 \text{ A}$$

$$R_{Th} = 10 \text{ } \Omega$$

16)

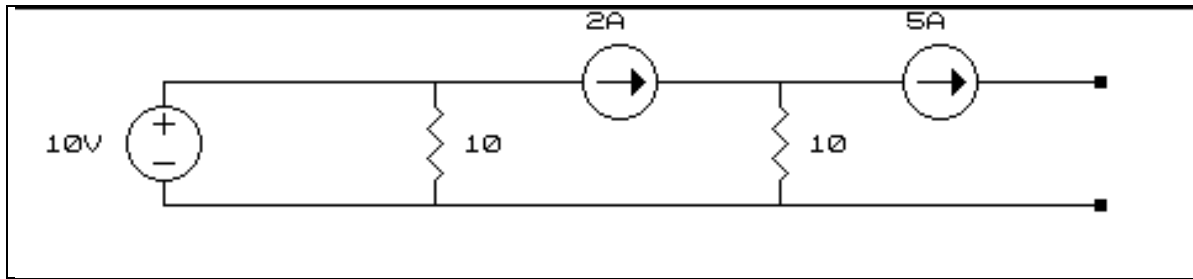


Figura P.3.16

$$V_{Th} = \infty \quad I_N = 5 \text{ A} \quad R_{Th} = \infty$$

17)

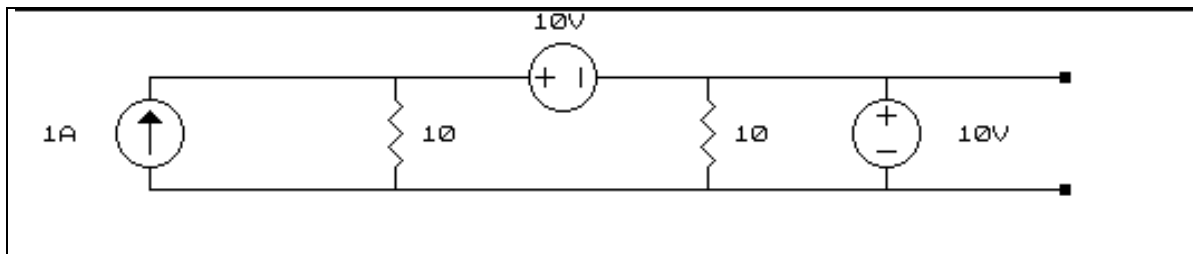


Figura P.3.17

$$V_{Th} = 10 \text{ V} \quad I_N = \infty \quad R_{Th} = 0 \text{ } \Omega$$

18)

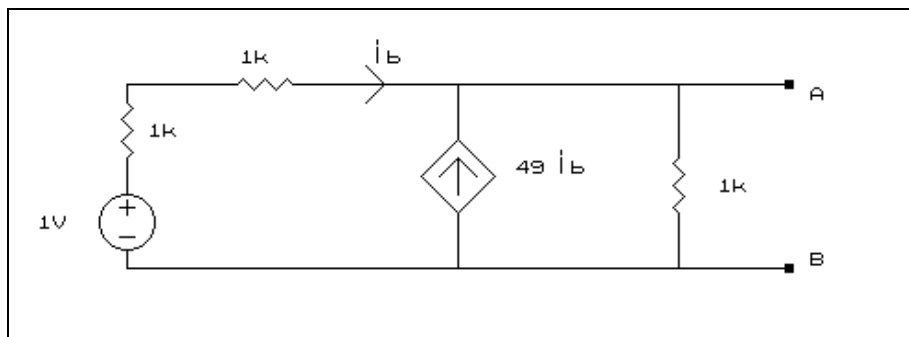


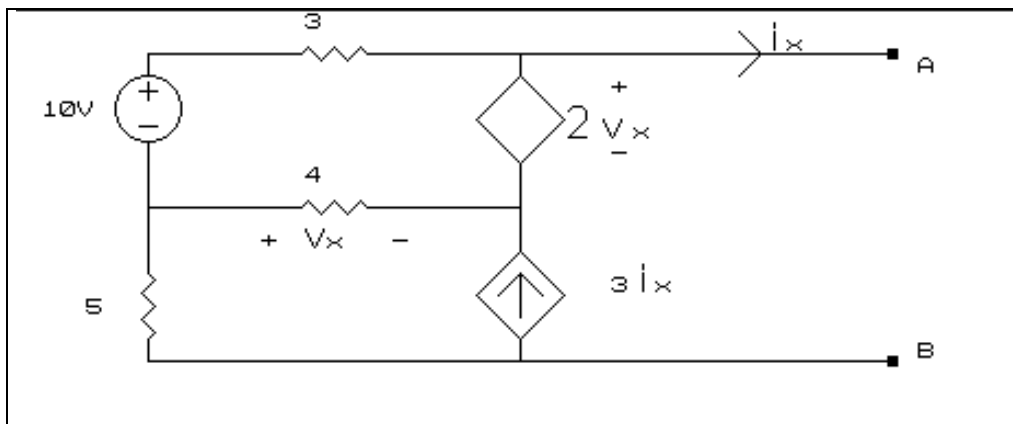
Figura P.3.18

$$V_{Th} = 25/26 \text{ V}$$

$$I_N = 25 \text{ mA}$$

$$R_{Th} = 500/13 \text{ } \Omega$$

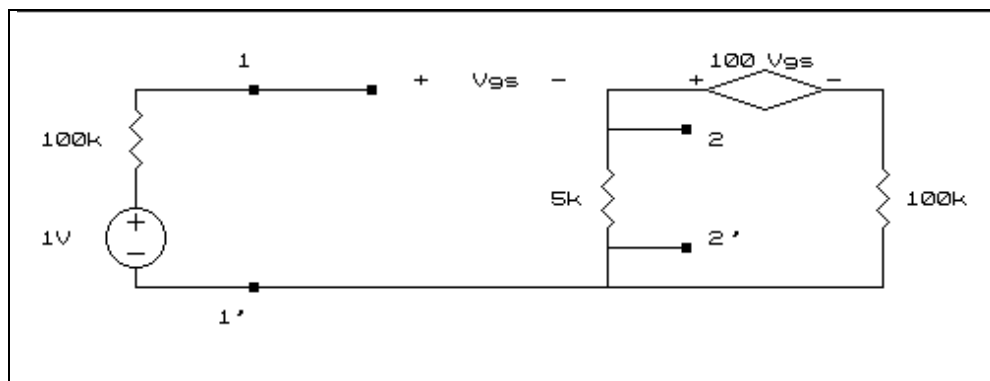
19)



FiguraP.3.19

$$V_{Th} = 40 \text{ V} \quad I_N = -20/17 \text{ A} \quad R_{Th} = -34 \text{ } \Omega$$

20)



FiguraP.3.20

$$\text{En } 11' \quad R_{Th} = \infty \quad \text{En } 22' \quad V_{Th} = 0,83 \text{ V} \quad I_N = 1 \text{ mA} \quad R_{Th} = 830 \text{ } \Omega$$

21)

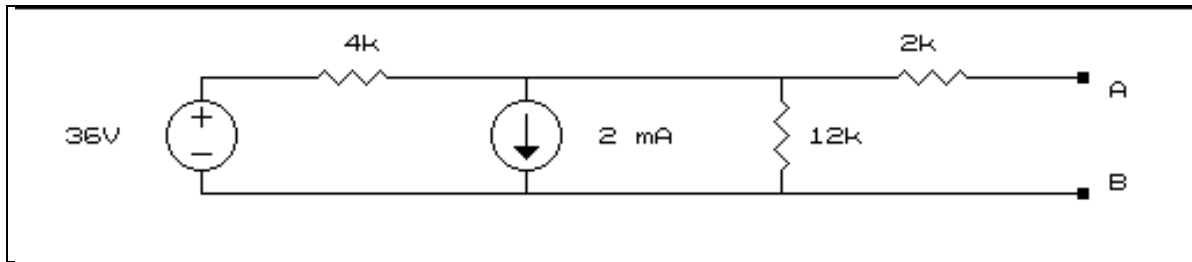


Figura P.3.21

$$V_{Th} = 21 \text{ V} \quad I_N = 4,2 \text{ mA} \quad R_{Th} = 5 \text{ k}\Omega$$

22)

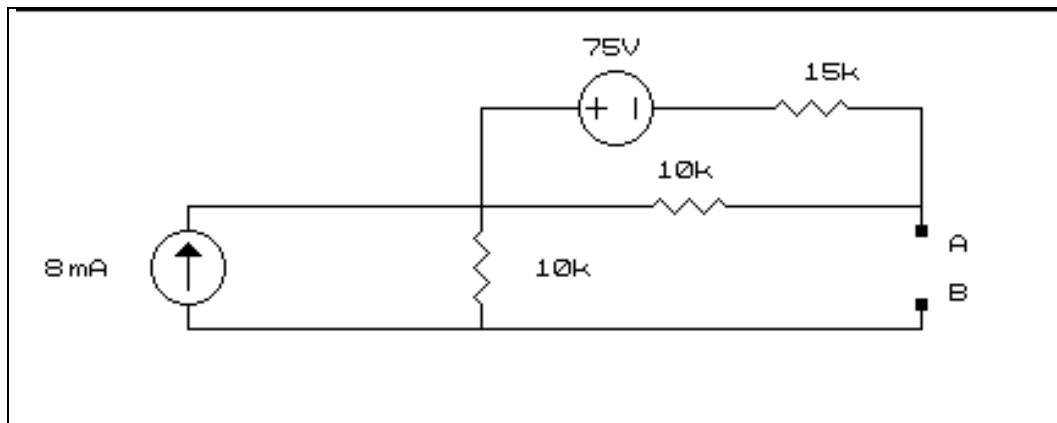


Figura P.3.22

$$V_{Th} = 50 \text{ V} \quad I_N = 3,125 \text{ mA} \quad R_{Th} = 16 \text{ k}\Omega$$

23) Si $g_m = 200 \text{ mS}$. Hallar equivalente de Thevenin en los terminales 22'.

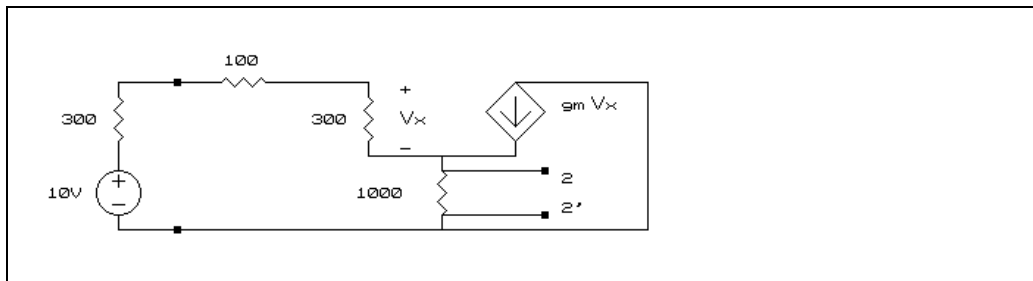
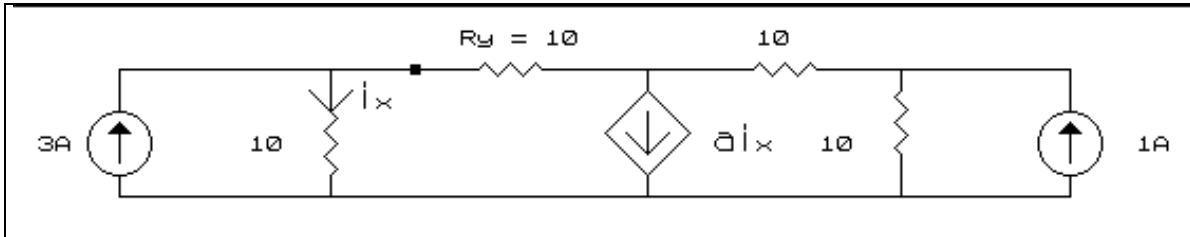


Figura P.3.23

En 22' $V_{Th} = 9,89 \text{ V}$ $I_N = 0,87 \text{ A}$ $R_{Th} = 11,35 \Omega$

24) Halle el valor de α para que la potencia en R_y sea:

- a) 0W
- b) 10W

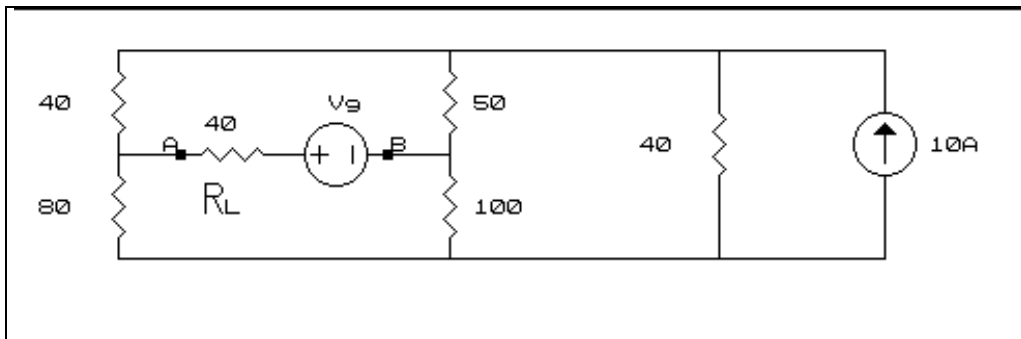


FiguraP.3.24

- $\alpha = 0,5$ $\alpha = -0,333$

25) Halle V_g si la potencia en $R_L = 40 \Omega$ es:

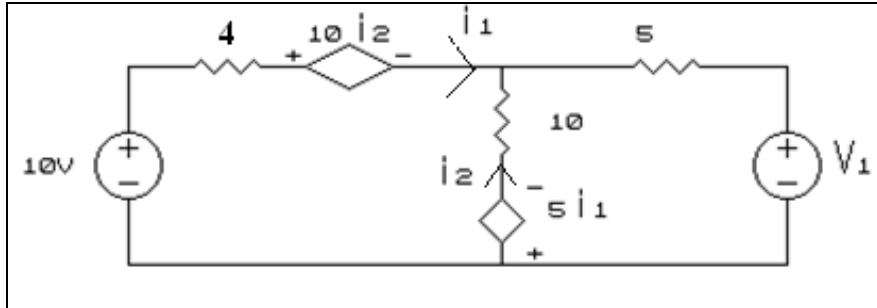
- a) 0 W b) 400 mW



FiguraP.3.25

- $V_g = 0 \text{ V}$ $V_g = 10 \text{ V}$

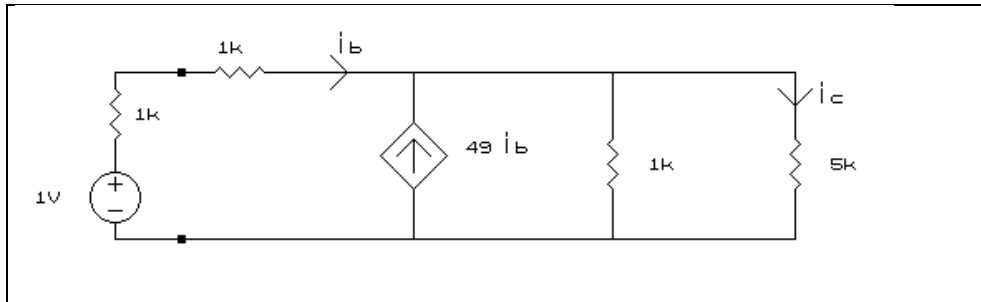
26) Hallar V_1 tal que $i_2 = 2 \text{ A}$



$$V_1 = 70 \text{ V}$$

FiguraP.3.26

27) Hallar i_c y R_{en} .

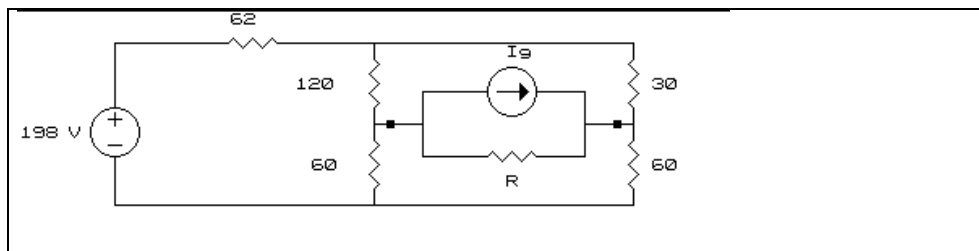


$$i_c = 1,9 \text{ mA}$$

$$R_{en} = 42,6 \text{ k}\Omega$$

FiguraP.3.27

28) Halle I_g si R disipa 0 W .



FiguraP.3.28

$$I_g = -0,5121 \text{ A}$$

29) Practique el teorema de superposición en los problemas anteriores que presenten más de una fuente.

CAPITULO 4

Régimen Transitorio: Estudio de Sistemas Simples de Primer Orden.

4.1 Introducción.

Hasta ahora solo hemos analizado circuitos formados por resistencias y fuentes y no hemos tenido en cuenta la variable tiempo, puesto que las respuestas se producen en el mismo instante en que se aplican las excitaciones y no cambian con el tiempo, debido a que las excitaciones que hemos considerado son constantes con el tiempo (corriente continua), luego las respuestas también lo son.

Las relaciones entre la tensión y la corriente, matemáticamente, han sido relaciones algebraicas en todos los casos hasta ahora analizados. En este capítulo vamos a introducir dos nuevos elementos: capacitores e inductores, que son elementos pasivos, no-disipativos (al menos en sus modelos ideales) y cuyas relaciones tensión corriente, involucran la variable tiempo y no son relaciones meramente algebraicas.

Los inductores y capacitores los podemos clasificar como elementos no-disipativos, puesto que no disipan energía eléctrica, esto es, no transforman la energía eléctrica en calor tal como lo hacen los resistores (elementos disipativos). Estos nuevos elementos son capaces de almacenar energía en campos magnéticos o campos eléctricos que se establecen en ellos. La energía que se almacena en algún intervalo de tiempo es devuelta a la red en instantes subsiguientes, pero nunca es disipada, esto siempre que consideremos los inductores y capacitores como elementos ideales, puesto que como estudiaremos con más detalle en posteriores capítulos, los inductores y los capacitores reales disipan parte de la energía suministrada, lo cual implica que el modelo real tiene algo de resistencia asociada a los respectivos efectos inductivos y capacitivos.

Antes de iniciar el estudio de estos dos nuevos elementos, recordemos que sus respectivas relaciones v vs i están regidas por la convención #1, esto es:



Figura4.1.1

4.2 CAPACITORES.

Un capacitor es un elemento pasivo, no-disipativo, capaz de almacenar energía eléctrica en el campo eléctrico que se puede formar entre sus placas. El capacitor de placas paralelas mostrado en el circuito de la fig. 4.2.1, nos ayudará a explicar la relación tensión-corriente en este tipo de elementos.

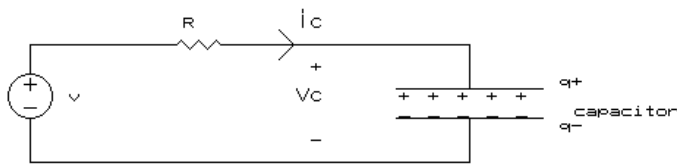


Figura4.2.1

El capacitor, tal como se muestra en la figura 4.2.1, está constituido por dos placas metálicas, separadas por un material dieléctrico (aislante, lo cual quiere decir que su resistencia es muy grande y se opone al flujo de carga eléctrica).

Al conectar la fuente de tensión se establece un flujo de carga eléctrica, que en este caso vamos a considerar que son electrones que salen de la placa superior del capacitor y se depositan en la placa inferior, quedando la placa superior cargada con una carga $q+$ (positiva, puesto que salieron electrones) y la placa inferior con una carga $q-$ (negativa, puesto que llegaron electrones). Esta distribución de cargas crea un campo eléctrico en el cual hay almacenada energía eléctrica. La carga depositada en las placas es directamente proporcional a la tensión v_c entre los extremos del capacitor, tal como lo muestra la relación siguiente:

$$q = C v_c$$

Donde C es la constante de proporcionalidad llamada capacitancia, medida en Farad (F) y cuyo valor depende en general de la geometría del capacitor y de la permitividad del dieléctrico.

$$i_c = \frac{dq}{dt}$$

Para hallar la relación tensión-corriente, sabemos que

luego

$$q = \int i_c dt$$

por lo tanto

$$v_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau \quad (4.2.1)$$

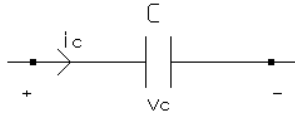


Figura 4.2.1 símbolo del capacitor

En la ecuación (4.2.1), tomamos como límite inferior de integración $-\infty$, con el fin de simbolizar que en ese instante de tiempo el capacitor no tenía ninguna carga depositada en sus placas.

La relación tensión-corriente en un capacitor también puede escribirse así:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Esta última expresión nos dice que para que exista una corriente i_c es necesario que la tensión v_c varíe con el tiempo; si la tensión v_c es una constante (como en el caso de la corriente continua) tenemos:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = 0 \quad (4.2.2)$$

lo cual quiere decir que el capacitor lo podemos interpretar como un circuito abierto para excitaciones constantes con el tiempo (corriente continua).

Para determinar la energía eléctrica almacenada en el campo eléctrico del capacitor en un intervalo de tiempo

$t = t_1 - t_2$, hagamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{dW}{dt} = v_c(t) i_c(t) \\ W(t) &= \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} v_c(t) i_c(t) dt \\ W(t) &= \int_{t_1}^{t_2} v_c(t) C \frac{dv_c}{dt} dt = C \int_{v_c(t_1)}^{v_c(t_2)} v_c(t) dv_c \\ W(t) &= \frac{1}{2} C (v_c^2(t_2) - v_c^2(t_1)) \end{aligned}$$

Profundicemos un poco más en el análisis de estas relaciones de energía. Supongamos que la variación de la energía, $W(t)$, en un elemento eléctrico es como se muestra a continuación:

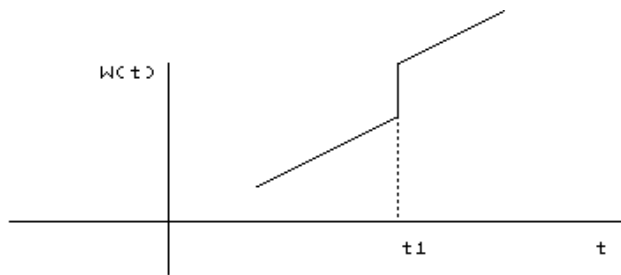


Figura4.2.3

Esta gráfica nos muestra una discontinuidad de la energía en el instante t_1 , luego

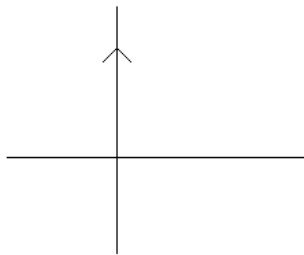
$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \infty$$

pero sabemos que es **imposible** obtener una potencia infinita de un elemento **físico real**, por lo tanto debemos concluir que la energía es una función continua, que no puede presentar saltos como el mostrado en la fig. 4.2.3, para el instante t_1 .

Ahora puesto que:

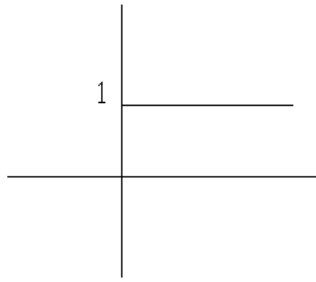
$$W(t) = \frac{1}{2} C v_c^2(t) = \frac{1}{2C} q_c^2(t)$$

Si $W_c(t)$ es una función continua, $v_c(t)$ también lo tiene que ser, luego concluimos que todo capacitor se opone a cualquier variación abrupta de su tensión v_c , o en otras palabras, la tensión v_c en un capacitor **no puede** variar bruscamente.



$$\begin{aligned} \delta(t) &= \infty \text{ para } t = 0 \\ \delta(t) &= 0 \text{ para } t \neq 0 \end{aligned}$$

Figura4.2.4a



$$\begin{aligned}
 u(t) &= 1 \text{ para } t \geq 0 \\
 u(t) &= 0 \text{ para } t < 0 \\
 \delta(t) &= \frac{du}{dt}
 \end{aligned}$$

Figura 4.2.4b

En las conclusiones anteriores, hemos hecho énfasis en que estamos utilizando elementos **físicos reales**, y por lo tanto consideramos que, por ejemplo, es imposible generar una función impulso o una función escalón unitaria, las cuales presentan una pendiente infinita en $t=0$ y cuyas definiciones y formas de onda se muestran en las fig. 4.2.4a y 4.2.4b.

No obstante, podemos hallar ciertas aproximaciones a dichas funciones y teóricamente podemos aceptarlas, lo cual nos llevaría a tener la posibilidad de obtener una potencia infinita. En este caso es preferible escribir la ecuación (4.2.1) así:

$$v_c = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{\infty} i_c(\tau) d\tau + v_c(0^-)$$

donde podemos observar que se ha considerado el instante $t = 0^-$, que para el caso de la función escalón se tiene que $u(0^-) = 0$, y en $t = 0^+$ $u(0^+) = 1$, lo cual implica que se tiene un cambio brusco de la función. Por lo tanto si la corriente en un capacitor tiene la forma de una función impulso, implicaría que la tensión en el capacitor puede cambiar instantáneamente puesto que:

$$v_c(0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_c(\tau) d\tau + v_c(0^-)$$

donde el término

$$\frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_c(\tau) d\tau \neq 0 \quad \text{solo si } i_c(\tau) = A\delta(t)$$

lo cual implica que: $v_c(0^+) = v_c(0^-)$ si la corriente en el capacitor no contiene una función impulso. Con esta hipótesis vamos a analizar todos los circuitos RC del presente capítulo, luego vamos a considerar que la tensión en un capacitor no cambia abruptamente.

4.3 INDUCTORES

Un inductor es un elemento pasivo, no-disipativo, capaz de almacenar energía eléctrica en el campo magnético que se forma en los alrededores del inductor. La forma más simple de un inductor es la que corresponde a una o varias vueltas de alambre, tal como se muestra en la fig.4.3.1.

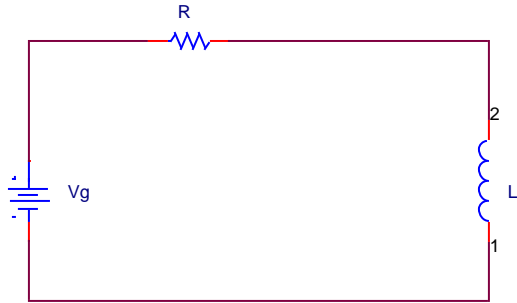


Figura 4.3.1

Al conectar una fuente de tensión circula una corriente, i , por la bobina, la cual produce un flujo magnético. Se dice que las líneas de flujo magnético "enlazan" la bobina. El flujo total que atraviesa el área de la bobina, es directamente proporcional a la corriente que pasa por ella, de acuerdo a la siguiente relación:

$$\lambda = N \phi = Li$$

donde λ es el llamado enlace de flujo, ϕ es el flujo magnético y L es la constante de proporcionalidad llamada autoinductancia o simplemente inductancia y medida en Henry (H), cuyo valor depende de la geometría de la bobina y de la permeabilidad del núcleo.

Para hallar la relación v vs i en un inductor, debemos recordar la ley de Faraday que se puede escribir así:

$$v_L = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Entonces la relación tensión - corriente en un inductor queda así:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Lo cual implica, que para que aparezca una tensión, v_L , autoinducida en un inductor, es necesario que la corriente i_L varíe con el tiempo. Si la corriente i_L es constante tenemos que:

$$v_L = 0$$

Lo cual quiere decir que, el inductor se comporta como un cortocircuito, cuando la corriente que circula por él, es constante.

La relación tensión-corriente, en un inductor, también se puede escribir así:

$$i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau \quad (4.3.1)$$

La energía almacenada en el campo magnético del inductor, se puede calcular siguiendo un procedimiento análogo al realizado para calcular la energía almacenada en un capacitor, obteniéndose la expresión siguiente:

$$W(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$$

La ecuación (4.3.1) también se puede escribir así:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^t v_L(\tau) d\tau + i_L(0^-)$$

Para calcular la corriente en el inductor en el instante $t=0^+$, tenemos:

$$i_L(0^+) = \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(\tau) d\tau + i_L(0^-)$$

donde el término:

$$\frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} v_L(\tau) d\tau \neq 0 \quad \text{solo si } v_L(\tau) = A\delta(t)$$

En el presente texto vamos a partir de la hipótesis de que $v_L(t)$ no presenta ningún impulso luego:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

En cursos de análisis de circuitos más avanzados, o cuando esté aplicando las transformadas de Laplace de redes eléctricas, usted podrá considerar todos los casos que no hemos estudiado aquí.

Antes de hacer algunos ejercicios de aplicación de los conceptos vistos sobre inductores y capacitores, presentemos la tabla 4.3.1, que nos muestra las unidades, en que normalmente encontraremos los inductores y capacitores comerciales.

Tabla 4.3.1

Inductores

$$\mu\text{H} \Rightarrow 10^{-6} \text{ H}$$

$$\text{mH} \Rightarrow 10^{-3} \text{ H}$$

$$\text{H} \Rightarrow \text{ H}$$

Capacitores

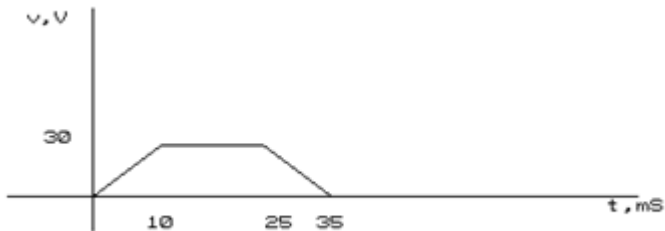
$$\text{pF} \Rightarrow 10^{-12} \text{ F}$$

$$\text{nF} \Rightarrow 10^{-9} \text{ F}$$

$$\mu\text{F} \Rightarrow 10^{-6} \text{ F}$$

Ejercicio 4.3.1.

Consideremos que la tensión, a través de un capacitor $C = 1 \mu\text{F}$, es la mostrada en la fig. 4.3.2. Calculemos las gráficas de $i(t)$, $W(t)$.

**Figura 4.3.2**

Para determinar la corriente recordemos que:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Luego debemos hallar las funciones que representan a $v_c(t)$

$$0 \leq t \leq 10 \text{ ms} \quad v_c(t) = 3 \times 10^3 t$$

$$10 \text{ ms} \leq t \leq 25 \text{ ms} \quad v_c(t) = 30$$

$$25 \text{ ms} \leq t \leq 35 \text{ ms} \quad v_c(t) = -3 \times 10^3 t + 105$$

Una vez conocidas estas expresiones, podemos aplicar la ecuación (4.2.2) para hallar $i_c(t)$ así:

$$i_c(t) = 1 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^3 = 3 \text{ mA} \quad 0 \leq t \leq 10 \text{ ms}$$

$$i_c(t) = 0 \quad 10 \text{ ms} \leq t \leq 25 \text{ ms}$$

$$i_c(t) = -3 \text{ mA} \quad 25 \text{ ms} \leq t \leq 35 \text{ ms}$$

Esta corriente se muestra en forma gráfica a continuación.

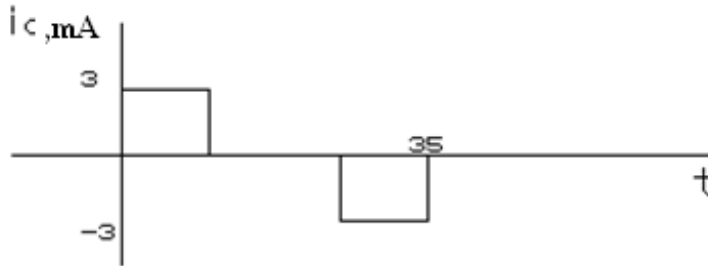


Figura4.3.3

Para hallar la energía almacenada en un instante t

$$W(t) = \frac{1}{2} C v_c^2(t)$$

$$0 \leq t \leq 10 \text{ ms} \quad W_c(t) = \frac{1}{2} \times 10^{-6} (9 \times 10^6 t^2 = 4,5t^2)$$

$$10 \text{ ms} \leq t \leq 25 \text{ ms} \quad W_c(t) = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 900 = 450 \mu\text{J}$$

$$25 \text{ ms} \leq t \leq 35 \text{ ms} \quad W_c(t) = \frac{1}{2} \times 10^{-6} (9 \times 10^6 t^2 - 630 \times 10^3 t + 105^2)$$

$$= 4,5t^2 - 0,315t + 5.512,5 \times 10^{-6}$$

La gráfica de la energía es:

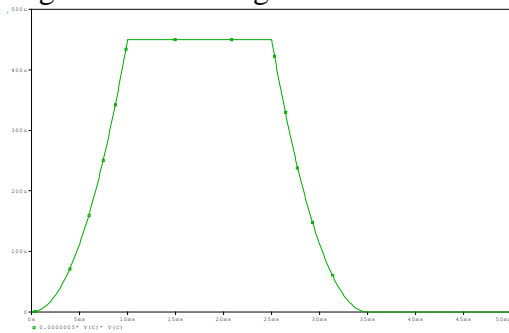


Fig.4.3.4

Si observamos esta última gráfica, vemos que en el intervalo

$0 \leq t \leq 10 \text{ ms}$, tanto la corriente como la tensión son positivos, esto es, tienen los sentidos y polaridades coincidentes con la convención #1.

En dicho intervalo de tiempo, decimos que el capacitor está recibiendo energía del circuito y la está

almacenando. En el intervalo $10 \text{ ms} \leq t \leq 25 \text{ ms}$, la corriente en el capacitor se hace nula y la energía permanece almacenada en el capacitor, sin ninguna variación. Finalmente en el intervalo $25 \text{ ms} \leq t \leq 35 \text{ ms}$, la tensión v_c es positiva y la corriente es negativa, lo cual implica que el capacitor está entregando energía al circuito.

Como vemos hay una diferencia muy importante con respecto a los elementos disipativos (resistores), puesto que estos últimos siempre están consumiendo energía, en ningún momento devuelven energía al circuito, lo cual quiere decir que en un resistor la tensión y la corriente siempre serán ambas positivas o ambas negativas. Para aclarar esto, consideremos que la tensión representada en la fig. 4.3.5 se aplica a un resistor de 10Ω y se pide obtener las gráficas de $v(t)$ y $W(t)$.

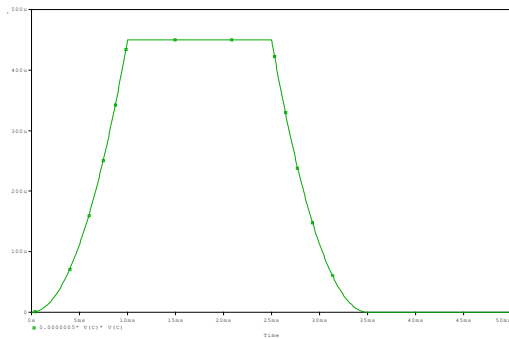


Figura4.3.5

Para hallar $i_R(t)$ basta con aplicar la ley de Ohm:

$$i_R(t) = \frac{v_R}{10}$$

luego la gráfica de $i_R(t)$ será

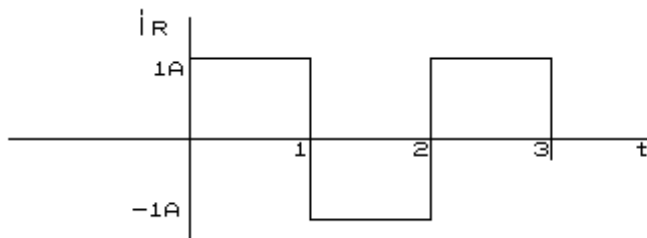


Figura4.3.6

Para calcular la energía $W_R(t)$ tenemos:

$$W_R(t) = \int_0^t v_R(\tau) i_R(\tau) d\tau = 10t$$

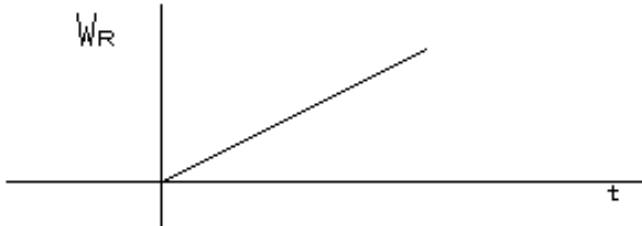


Figura4.3.7

De las gráficas y expresiones anteriores, vemos que la energía en el resistor siempre aumenta, puesto que en todo instante la está consumiendo, esto es, en el resistor la energía siempre se está disipando, en ningún momento se devuelve la energía al circuito. Esto también se manifiesta en los signos de v_R e i_R . En el intervalo $0 \leq t \leq 1$ s, ambas variables son positivas (recibe potencia del circuito) y en el intervalo $1 \leq t \leq 2$ s ambas variables son negativas (también recibe potencia del circuito).

Consideremos ahora otro par de ejercicios, para ilustrar la aplicación de los conceptos anteriores.

Ejercicio 4.3.2.

En la fig. 4.3.8, se muestra la corriente i_c en un capacitor

$C = 1\mu\text{F}$ y se pide hallar $v_c(t)$.

Como $v_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau$

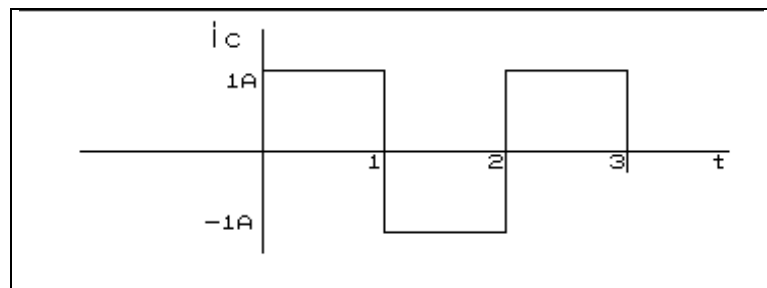


Figura4.3.8

tenemos:

$$-\infty \leq t \leq 0 \quad v_c = 10^6 \int_{-\infty}^t 0 d\tau = 0$$

$$0 \leq t \leq 1 \text{ s} \quad v_c = 10^6 \int_{-\infty}^0 i_c(\tau) d\tau + 10^6 \int_0^t i_c(\tau) d\tau = 10^3 t$$

$$0 \leq t \leq 2 \text{ s} \quad v_c = 10^6 \int_{-\infty}^1 i_c(\tau) d\tau \quad v_c = 10^6 \int_1^t i_c(\tau) d\tau = 2000 - 1000t$$

Luego la gráfica de $v_c(t)$ es la mostrada en la fig. 4.3.9. Podemos observar claramente que la tensión $v_c(t)$ no cambia bruscamente, pero la corriente $i_c(t)$ si tiene cambios abruptos. También podemos concluir que en el intervalo $0 \leq t \leq 1$ s, el capacitor recibe energía del circuito (tanto la tensión como la corriente son positivas), y en el intervalo $1 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$ el capacitor entrega energía al circuito (la tensión $v_c > 0$ y la corriente $i_c < 0$).

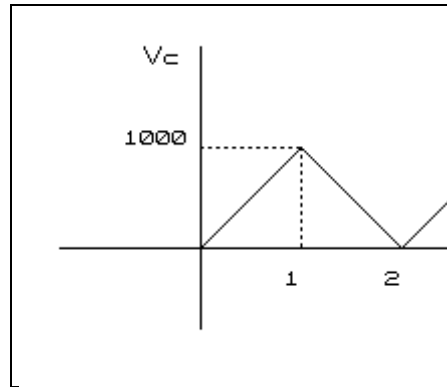


Figura4.3.9

Ejercicio 4.3.3.

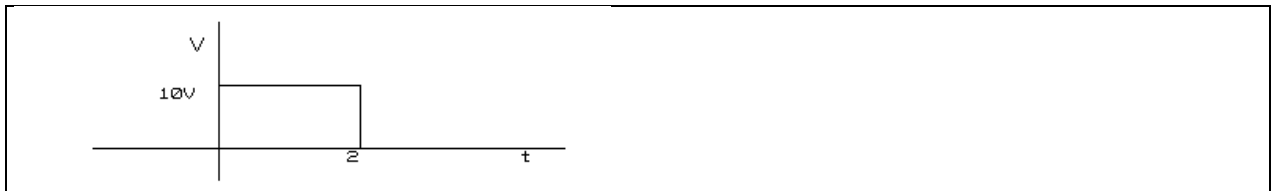


Figura4.3.10

Finalmente consideremos que la tensión representada en la fig. 4.3.10, se aplica a un inductor $L = 1$ H, y se quiere hallar $i_L(t)$ y $W_L(t)$

Para calcular $i_L(t)$ sabemos que: $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau$

$$\text{Para } 0 < t < 2 \text{ s} \quad i_L = \frac{1}{1} \int_{-\infty}^0 v_L(\tau) d\tau + 1 \int_0^t v_L(\tau) d\tau = 10t$$

$$\text{Para } t > 2 \text{ s} \quad i_L = \frac{1}{1} \int_{-\infty}^2 v_L(\tau) d\tau + 1 \int_2^t v_L(\tau) d\tau = 20$$

Cuya gráfica se representa en la fig. 4.3.11.

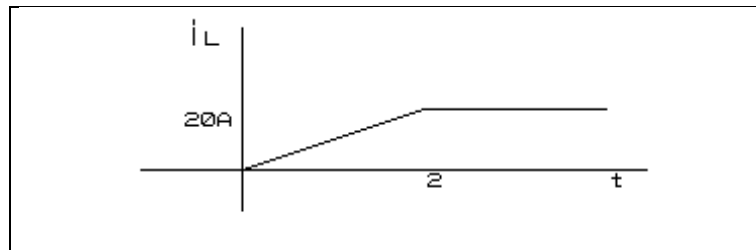


Figura4.3.11

Para calcular $W_L(t)$

$$W(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = W(t) = \frac{1}{2} * 1 * 100 t^2 = 50 t^2$$

En este caso vemos, que tanto la corriente como la tensión son positivas y, por lo tanto, el inductor está recibiendo energía del circuito. A partir de $t = 2$ s la corriente se hace constante $i_L = 20$ A y la tensión es 0 V, esto quiere decir que queda almacenada una energía en el inductor por un tiempo indefinido; esto no ocurre en la realidad, puesto que el inductor tiene siempre una pequeña resistencia asociada con él y la energía se irá disipando paulatinamente.

Antes de introducir estos dos nuevos elementos: inductor y capacitor habíamos analizado circuitos eléctricos compuestos por fuentes corriente continua y por resistores. Las respuestas obtenidas han sido constantes. Vamos a ver que al someter circuitos RC o RL a excitaciones constantes, las respuestas van a ser función del tiempo.

Antes de iniciar el análisis de este tipo de circuitos, debemos recalcar que las leyes de Kirchoff presentadas en capítulos anteriores se cumplen en todo instante de tiempo, luego las podremos re-escribir así:

$$\begin{aligned} \sum i(t) &= 0 && \text{en cualquier nudo} \\ \sum v(t) &= 0 && \text{en cualquier malla} \end{aligned}$$

Esto nos servirá para hallar el capacitor o inductor equivalente, de un conjunto de capacitores o inductores interconectados en serie o paralelo.

Capacitores en serie

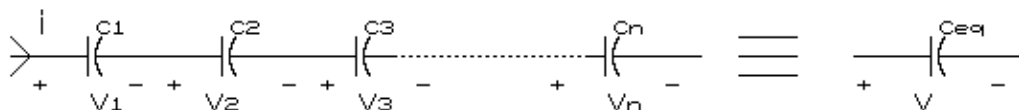


Figura4.3.12

$$v = \sum_1^n v_i = v_1 + v_2 \dots \dots + v_n$$

$$v = \frac{1}{C_1} \int idt + \frac{1}{C_2} \int idt + \dots \dots \frac{1}{C_n} \int idt$$

$$v = (\int idt) * \sum_1^n \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_{eq}} \int idt$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_1^n \frac{1}{C_i}$$

Esta última expresión me permite hallar el capacitor equivalente de n capacitores interconectados en serie.

Capacitores en paralelo



Figura4.3.13

$$i = \sum_1^n i_i = i_1 + i_2 \dots \dots + i_n$$

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots \dots C_n \frac{dv}{dt}$$

$$i = \frac{dv}{dt} * \sum_1^n C_{eq} = \frac{dv}{dt} * C_{eq}$$

$$C_{eq} = \sum_1^n C_i$$

Inductores en Serie

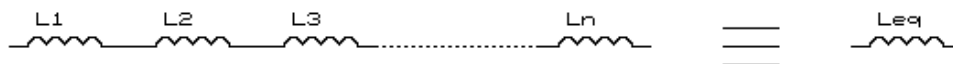


Figura4.3.14

$$v = \sum_1^n v_i = v_1 + v_2 \dots \dots + v_n$$

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots \dots L_n \frac{di}{dt}$$

$$v = \left(\sum_1^n L_i \right) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \sum_1^n L_i$$

Inductores en paralelo.

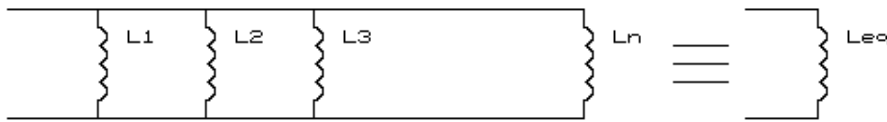


Figura4.3.15

$$i = \sum_1^n i_i = i_1 + i_2 \dots \dots + i_n$$

$$i = \frac{1}{L_1} \int v dt + \frac{1}{L_2} \int v dt + \dots \dots \frac{1}{L_n} \int v dt$$

$$\left(\sum_1^n \frac{1}{L_i} \right) \int v dt = \frac{1}{L_{eq}} \int v dt$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_1^n \frac{1}{L_i}$$

Iniciemos ahora el análisis de circuitos RC simples (con resistores y capacitores), sometidos a una excitación de corriente continua.

4.4 Circuitos RC de primer orden

Consideremos el circuito mostrado en la fig. 4.4.1, donde aparece un interruptor S , que puede conectar o desconectar la fuente de excitación.

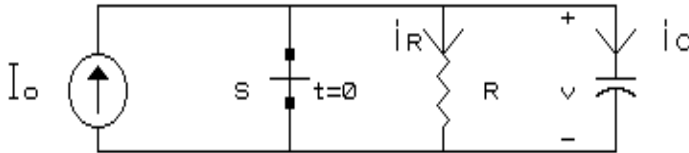


Figura 4.4.1

Tal como lo indica la fig. 4.4.1, para $t < 0$, toda la corriente I_0 circula a través del interruptor S , puesto que todos los elementos están en corto circuito. Esto nos dice que la red RC no ha recibido energía de la fuente de corriente. Veamos ahora lo que sucede al abrir el interruptor en el instante $t=0$. Como es un circuito paralelo, vamos a hallar la tensión $v(t)$ como respuesta de la red, pero recuerde que una vez conocido $v(t)$ podemos hallar $i_R(t)$ e $i_C(t)$.

Al abrir el interruptor S en $t = 0$, no circulará ninguna corriente en dicho interruptor puesto que ahora es un circuito abierto. Para determinar $v(t)$ apliquemos la LCK así:

$$\begin{aligned} -I_0 + i_R + i_C &= 0 \\ \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} &= I_0 \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Esta es una ecuación diferencial, lineal ordinaria con coeficientes constantes y de primer orden (repase sus conocimientos sobre ecuaciones diferenciales).

Nosotros nos abocaremos al estudio de circuitos RC o RL de primer orden, lo cual quiere decir que la ecuación diferencial que caracteriza al sistema es de primer orden.

Puesto que el segundo miembro de la ecuación es una constante y de acuerdo a las características de la ecuación diferencial, recordemos que un método de solución consiste en suponer una solución que será de la forma siguiente:

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + B \quad (4.4.2)$$

Donde A , B y τ son constantes que se pueden determinar, reemplazando esta solución supuesta, en la ecuación diferencial (4.4.1) y también utilizando las condiciones iniciales del circuito en estudio. Procediendo al reemplazo tenemos:

$$\frac{1}{R} \left(A e^{-\frac{t}{\tau}} + B \right) + C \left(-\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = I_0$$

Reordenando tenemos:

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{C}{\tau} \right) \left(A e^{-\frac{t}{\tau}} \right) + \frac{B}{R} = I_0 \quad (4.4.3)$$

Si la expresión (4.4.2) es una solución de la ecuación diferencial (4.4.1), la última ecuación, debe ser una identidad, esto es:

$$\frac{1}{R} - \frac{C}{\tau} = 0 \quad (4.4.4)$$

$$\frac{B}{R} = I_0$$

De la solución de las ecuaciones (4.4.4) obtenemos:

$$\tau = RC$$

$$B = RI_0$$

Sólo nos quedaría por hallar la constante A, para tener claramente determinada la respuesta $v(t)$. Para hallar el valor de A, es necesario conocer una condición inicial, que en este caso es $v(0)$.

Para entender bien lo referente a condiciones iniciales vamos a distinguir los siguientes instantes de tiempo: $t = 0^-$, que es un instante inmediatamente antes de conmutar el interruptor S, lo cual quiere decir que el circuito en cuestión quedaría así

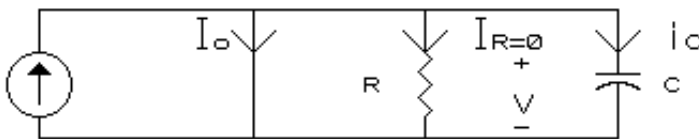


Figura 4.4.2

Luego $v(0^-) = 0 \text{ V}$

Para $t = 0^+$, que es un instante inmediatamente después de conmutar el interruptor S, lo que implica que el circuito en cuestión quedaría así:

$$v(0^+) = 0 \text{ V}$$

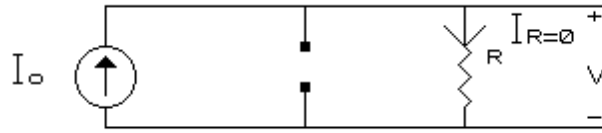


Figura4.43

Si partimos de la hipótesis de que $v_c(0^-) = v_c(0^+)$, esto es, la tensión en el capacitor no puede cambiar entre $t = 0^-$ y $t = 0^+$, lo cual quiere decir que no puede cambiar al conmutar el interruptor S (estamos asumiendo un interruptor ideal donde la conmutación se realiza instantáneamente. En la realidad esta conmutación toma un cierto tiempo).

Luego $v(0) = v(0^+) = 0$ puesto que el capacitor no recibió ninguna energía de la fuente para $t < 0$

Esta condición inicial $v(0) = 0$ es la que nos permite hallar el valor de la constante A.

Sabiendo que

$$v(0) = 0 = Ae^{-t/\tau} + B \mid t=0$$

tenemos

$$0 = A + RI_0$$

luego

$$A = -I_0R$$

quedando

$$v(t) = I_0R(1 - e^{-t/RC})$$

Cuya gráfica se muestra en la fig. (4.4.4).

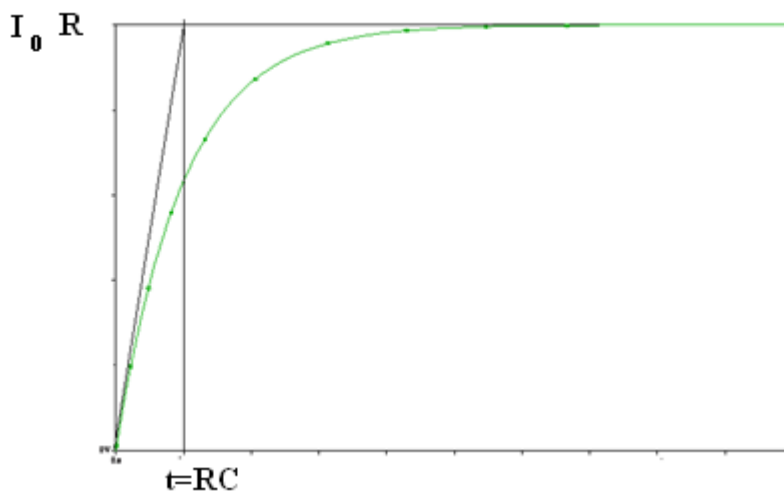


Figura4.4.4

Para interpretar la constante τ , llamada constante de tiempo del circuito, tabulemos la respuesta

$v(t)/I_0R$ tal como se muestra en la Tabla siguiente:

Tabla 4.4.1

$v(t)/I_0R$	t
$1 - e^{-1} = 0,6321$	τ
$1 - e^{-2} = 0,8647$	2τ
$1 - e^{-3} = 0,9502$	3τ
$1 - e^{-4} = 0,9817$	4τ
$1 - e^{-5} = 0,9933$	5τ

τ la podríamos interpretar como el tiempo que tarda $v(t)$ para llegar al 63,2% de su valor final. Observe bien que si aumentamos R o C , τ crece, lo cual quiere decir que el tiempo necesario para alcanzar el 63,2% del valor final será mayor.

Otra interpretación de τ la podemos obtener calculando la pendiente inicial de $v(t)$

$$\text{en } t = 0 \quad \frac{dv}{dt} = \frac{I_0R}{RC} e^{-t/RC} = \frac{I_0}{C}$$

y si trazamos una recta que tenga la pendiente inicial de $v(t)$ y la llamamos $v_x(t)$, tenemos $v_x(t) = \frac{I_0}{C} t$

El tiempo t_1 para que $v_x(t_1) = \frac{I_0}{C} t_1 = I_0R$ será

$$t_1 = RC = \tau$$

Por lo tanto τ la podemos interpretar como el valor de tiempo empleado por $v(t)$ para llegar al valor final I_0R , suponiendo una pendiente de crecimiento constante igual a la pendiente inicial de $v(t)$. Como vemos la unidad en que se mide τ es en segundos (unidad de tiempo).

De acuerdo a los resultados de la tabla podríamos decir que

$$v(t) = I_0R(1 - e^{-t/RC})$$

es prácticamente igual a I_0R después de $t = 5\tau$.

Todo esto nos sugiere que podemos descomponer a $v(t)$ en dos partes, una de ellas la llamaremos respuesta transitoria, puesto que prácticamente desaparece después de 5 constantes de tiempo, y una respuesta de régimen permanente. Esto es:

$$v(t) = v_i(t) + v_p(t)$$

donde

$$v_t(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \text{ respuesta transitoria}$$

$$v_p(t) = B \quad \text{respuesta de régimen permanente}$$

La respuesta transitoria en cualquier circuito RC o RL de primer orden **siempre** será de la forma:

$$y_t(t) = Ae^{-t/\tau}$$

La respuesta $y(t)$ puede ser una corriente o una tensión en cualquier elemento del circuito.

Ahora, puesto que vamos a trabajar con fuentes de corriente continua, la respuesta de régimen permanente siempre será un valor constante,

$$y_p(t) = B$$

Lo expuesto en los párrafos anteriores, nos sugiere una forma muy sencilla de obtener la respuesta de un circuito RC de primer orden.

Método para hallar la respuesta de un circuito RC de primer orden.

1) La respuesta transitoria $y_t(t)$ será

$$y_t(t) = Ae^{-t/\tau} \text{ con } \tau = RC$$

2) La respuesta de régimen permanente la podemos hallar, considerando que ha transcurrido un tiempo $t > 5\tau$, luego las tensiones y corrientes en el circuito han dejado de variar con el tiempo, ahora son constantes, puesto que las excitaciones son constantes con el tiempo. Esto implica que los capacitores cuando están formando parte de un circuito con excitación constante y después de haber alcanzado el régimen permanente ($t > 5\tau$), se comportan como un circuito abierto puesto que

si $t > 5\tau$ $v_c(t) = v_p(t) = B$ (constante).

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = 0$$

Esto lo podemos aplicar fácilmente en el circuito bajo estudio

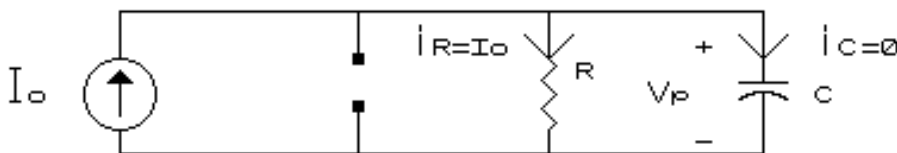


Figura 4.4.5

Para $t > 5\tau$ $v_p(t) = I_0 R$

Recuerde que el capacitor se comporta como un circuito abierto, en régimen permanente, sólo si la excitación es de corriente continua. En el caso de excitaciones variables con el tiempo el comportamiento de los capacitores es diferente.

3) Para hallar el valor de A , basta con aplicar las condiciones iniciales, tal como se hizo en el ejercicio estudiado.

Encontremos ahora $i_R(t)$ e $i_c(t)$ utilizando el método directo propuesto.

Puesto que el circuito en cuestión es un sistema de primer orden, sólo tiene un capacitor equivalente, luego tenemos que:

$$i_R(t) = i_{Rt}(t) + i_{Rp}(t)$$

Donde $i_{Rt}(t) = Ae^{-t/\tau}$ con $\tau = RC$

para hallar el valor de la corriente en el resistor en régimen permanente, debemos tener en cuenta que el capacitor se comporta como un circuito abierto y observando la fig. 4.4.5 vemos que:

$$i_{Rp}(t) = I_0$$

Para hallar el valor de A_1 debemos conocer el valor inicial de i_R , sabiendo que al hacer la conmutación la tensión en el capacitor no puede cambiar. Si vemos la fig. 4.4.3, podemos concluir que en $t=0^+$ $i_R(0^+) = 0$. Tenga presente que la corriente y tensión en el resistor pueden variar instantáneamente. Conocido el valor inicial de i_R , podemos hallar A

$$i_R(0) = 0 = A_1 + I_0$$

luego $A_1 = -I_0$

e $i_R(t) = I_0(1 - e^{-t/Rc})$

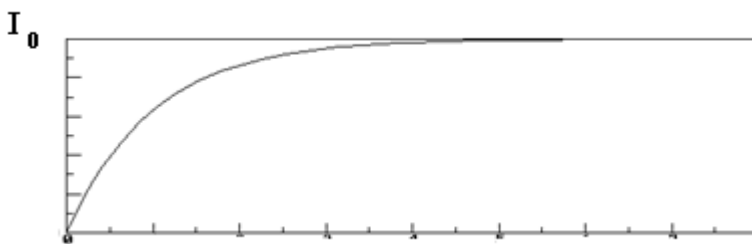


Figura 4.4.6

La corriente $i_c(t)$ se puede hallar en forma similar:

$$i_c(t) = i_{ct}(t) + i_{cp}(t)$$

donde $i_{ct}(t) = A_2 e^{-t/\tau}$ $\tau = Rc$
e $i_{cp}(t) = 0$
luego $i_c(t) = A_2 e^{-t/Rc}$

Para hallar A_2 sabemos que $i_c(0) = I_0$ (ver fig. 4.4.3). Por lo tanto $i_c(t) = I_0 e^{-t/Rc}$.

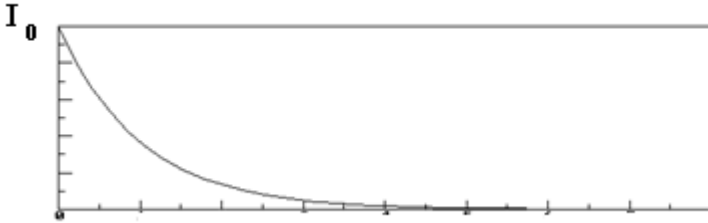


Figura4.4.7

En el ejemplo analizado no hubo ningún problema para hallar τ , puesto que sólo existía un resistor y un capacitor. Podemos decir que un circuito cualquiera es de primer orden si después de anular el efecto de las fuentes de excitación (colocando un corto, donde haya una fuente independiente de tensión; y un circuito abierto donde haya una fuente independiente de corriente), el circuito resultante se puede reducir a un circuito RC simple, y su constante de tiempo será $\tau = R_{eq} C_{eq}$, tal como se muestra en la fig. 4.4.8.

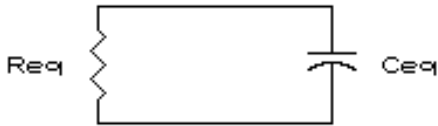
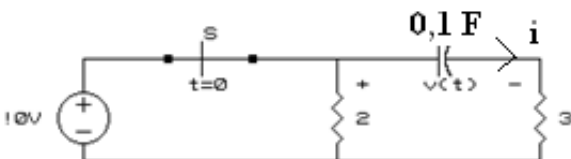


Figura4.4.8

A continuación vamos a desarrollar un grupo de ejercicios con los cuales ilustraremos los conceptos anteriores.

Ejercicio 4.4.1: En el circuito de la fig. 4.4.9, se pide determinar el valor de $v(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$.



El interruptor S se abre en $t=0$

Figura4.4.9

Empecemos por hallar $v(t)$:

$$v(t) = v_t(t) + v_p(t)$$

donde

$$v_t(t) = A e^{-t/\tau}$$

Pero resulta que este circuito tiene dos resistores y un capacitor, luego es necesario reducir a un circuito RC equivalente. Como la respuesta se pide para $t > 0$, donde S está abierto, tenemos:

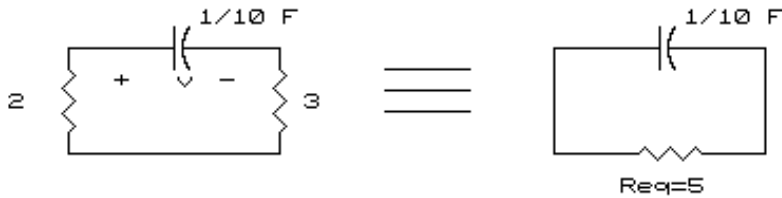


Figura 4.4.10

$$\therefore \tau = 5 * 0,1 = 0,5 \text{ s} \quad \text{Luego } v_t(t) = A e^{-2t}$$

Para hallar la respuesta de régimen permanente $v_p(t)$, dibujemos nuevamente el circuito para $t > 0$

Como vemos en este circuito no hay fuente de excitación, luego la única posible fuente de energía es la energía almacenada en el capacitor, la cual se va disipando paulatinamente en los resistores, luego podemos decir que para $t > 5\tau$ $v_p(t) \equiv 0$ puesto que el capacitor ha descargado su energía en el circuito.

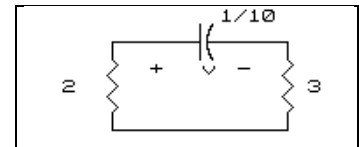


Figura 4.4.11

Finalmente para hallar A, necesitamos conocer la tensión en el capacitor en $t = 0^-$ (un instante antes de abrir S). Para $t = 0^-$ tenemos:

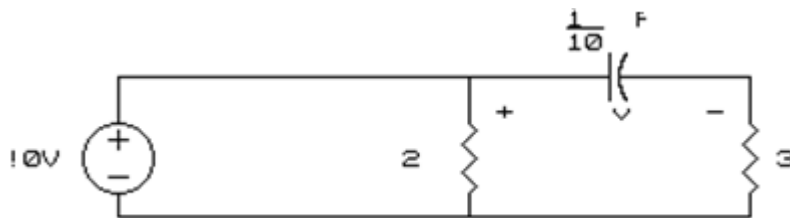


Figura 4.4.12

Como el circuito ha estado en esta posición por un "largo tiempo", ($t > 5\tau$), podemos decir que está en régimen permanente, y puesto que la excitación es constante, el capacitor se comporta como un circuito abierto, luego la tensión en $t = 0^-$ en el capacitor será:

$$v_c(0^-) = v(0^-) = 10 \text{ V} = v(0^+)$$

como $v(t) = A e^{-2t} + 0$

tenemos que $v(0) = 10 = A$

luego $v(t) = 10 e^{-2t}$

Como la corriente $i(t)$ en el resistor $R=3 \Omega$ es la misma que circula por el capacitor, se puede obtener así:

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = 0,1 * 10 * (-2e^{-2t}) = -2e^{-2t}$$

Es importante ver que se presentan dos regímenes permanentes, uno para $t < 0$ y otro para $t > 0$, puesto que en ambas posiciones el interruptor permaneció cerrado un tiempo $t > 5\tau$.

Ejercicio 4.4.2:

En el circuito de la fig. 4.4.13, S permanece un "largo tiempo" en la posición 1. En $t = 0$ pasa a la posición 2. Grafique $v(t)$ para $t > 0$ y halle la energía almacenada en C en $t = 0$ y $t = \infty$.

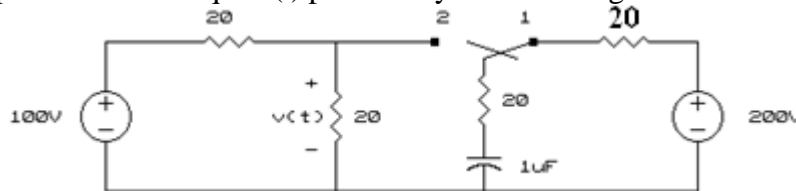


Figura 4.4.13

Empezamos la solución, escribiendo la expresión de $v(t)$ para $t > 0$:

$$v(t) = A e^{-t/\tau} + B$$

La constante de tiempo la obtenemos reduciendo el circuito de la fig. 4.4.13, donde se ha eliminado el efecto de la fuente de tensión.

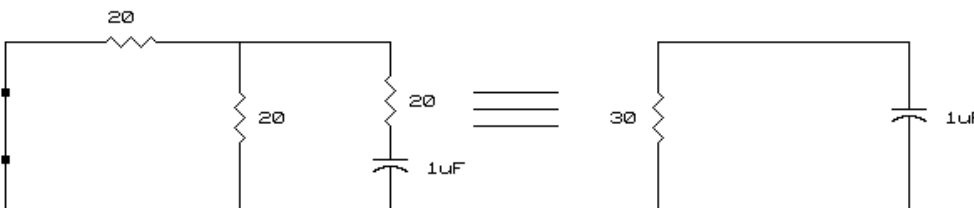


Figura 4.4.14

$$\tau = 30 * 1 * 10^{-6} = 30 \mu\text{s}$$

Para hallar $v_p(t)$ tenemos:

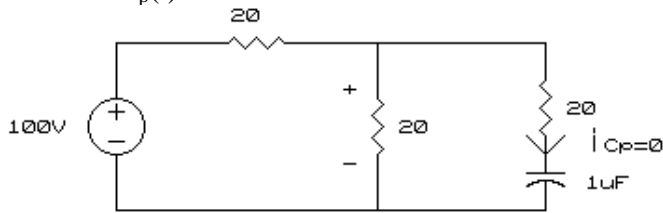


Figura4.4.15

Como la corriente en el capacitor es nula (en régimen permanente), \underline{C} se comporta como un circuito abierto y podemos aplicar la relación del divisor de tensión para hallar

$$v_p(t) = 100 * \frac{20}{40} = 50 \text{ V}$$

Para determinar el valor de A, es necesario calcular $v_c(0^-) = v_c(0^+)$, puesto que la tensión en el capacitor no cambia bruscamente al hacer la conmutación. Luego en $t = 0^-$ tenemos:

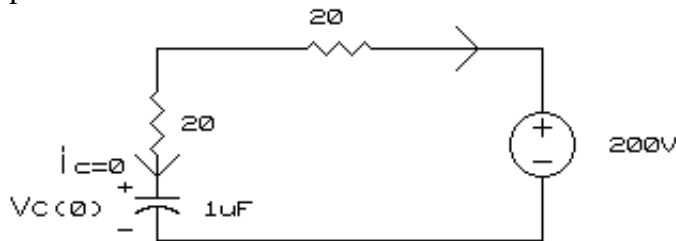


Figura4.4.16

$i_c = 0$, por haber estado un "largo tiempo" ($t > 5\tau$) en la posición 1, luego $v_c(0^-) = 200 \text{ V}$

Entonces para hallar $v(0^+)$ tenemos: en $t = 0^+$

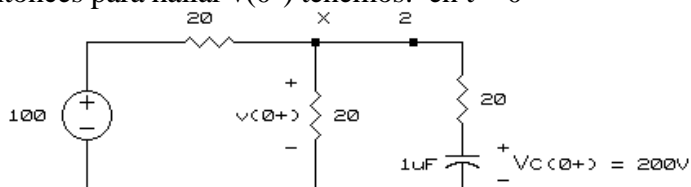


Figura4.4.17

$$v_c(0^-) = v_c(0^+) = 200 \text{ V}$$

Apliquemos ahora la LCK al nudo x, y tenemos:

$$\frac{v(0^+) - 100}{20} + \frac{v(0^+)}{20} + \frac{v(0^+) - 200}{20} = 0$$

luego $v(0^+) = 100 \text{ V}$

Con este valor conocido podemos ahora hallar A:

y como $v(0) = 100 = A + 50 \quad \therefore \quad A = 50$

$$v(t) = 50e^{-t/\tau} + 50$$

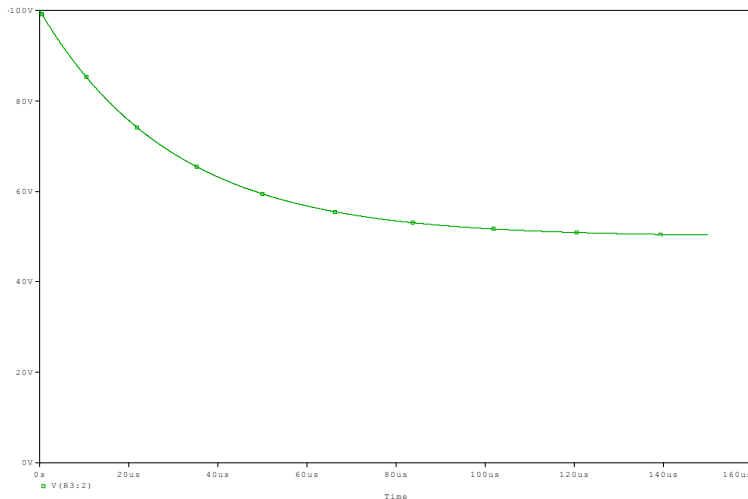


Figura 4.4.18

Observe que la tensión cambió bruscamente de 50 a 100V en $t = 0$, esto no puede ocurrir en un capacitor.

Para hallar la energía en el capacitor sabemos que

$v_c(0^+) = 100 \text{ V}$ luego

$$W(0) = \frac{1}{2} C v_c^2(0) = 2 * 10^{-2} \text{ J}$$

En $t = \infty$ la tensión en el capacitor es $v_c(\infty) = 50 \text{ V}$ (obtenga Usted este valor), luego

$$W(\infty) = \frac{1}{2} C v_c^2(\infty) = 1,25 * 10^{-3} \text{ J}$$

Podemos concluir que en el intervalo $0 \leq t \leq \infty$ el capacitor entregó 18,75 mJ de energía al circuito.

Ejercicio 4.4.3: En el circuito mostrado en la fig. 4.4.19, hallar $v(t)$ para $t > 0$ y la energía almacenada en los capacitores. En $t=0$ se abren S1 y S2.

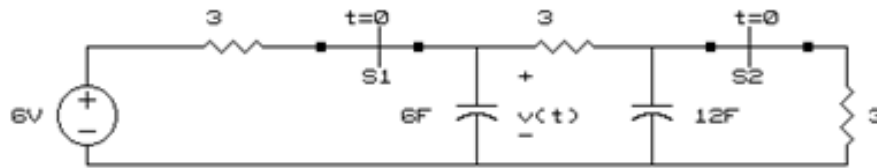


Figura4.4.19

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + B$$

Para hallar el valor de τ miremos el circuito que queda después de abrir los interruptores S1 y S2, el cual se muestra en la fig. 4.4.20.

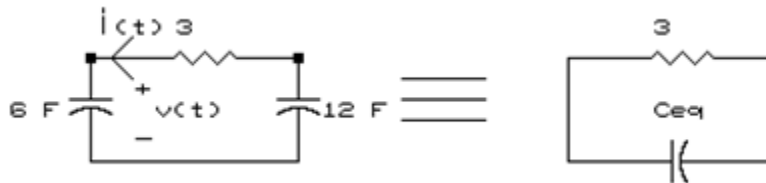


Figura4.4.20

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \therefore C_{eq} = 4 \text{ F}$$

Luego $\tau = R C_{eq} = 12 \text{ s}$.

Al tratar de hallar $v_p(t)$, podríamos pensar que debido a que no hay fuentes de excitación para $t > 0$ (puesto que se han desconectado), la tensión en los capacitores debería llegar a ser cero. Pero si Usted analiza cuidadosamente la fig. 4.4.20, puede observar que si los dos capacitores tienen una cierta energía almacenada en $t = 0^+$, aquel capacitor que tenga mayor tensión (y más energía) suministrará energía el circuito, de la cual, parte se disipará en el resistor y parte cargará adicionalmente al otro capacitor aumentando su tensión, llegará un momento en el que las tensiones en los capacitores se igualen y por lo tanto la corriente en el circuito se haga nula. Al establecerse esta condición los capacitores no se descargan más y mantienen la energía almacenada.

Siempre que se nos presente un circuito con varios capacitores en serie es posible que ocurra algo parecido a lo que acabamos de explicar en forma cualitativa, en estos casos el análisis debemos hacerlo en una forma un poco diferente a la aplicada en los ejercicios anteriores.

Aquí debemos hallar primero la corriente que circula en el circuito serie de la fig. 4.4.20, la cual, tal como lo hemos explicado, se anula después de un cierto tiempo, luego $i(t)$ no tiene componente de régimen permanente y será:

$$i(t) = A_1 e^{-t/\tau} = A_1 e^{-t/12}$$

Para hallar el valor de A_1 debemos conocer las condiciones iniciales, esto es, $v_{c1}(0^+)$ y $v_{c2}(0^+)$, valores que se determinan de la siguiente manera:

En $t = 0^-$ se tiene:

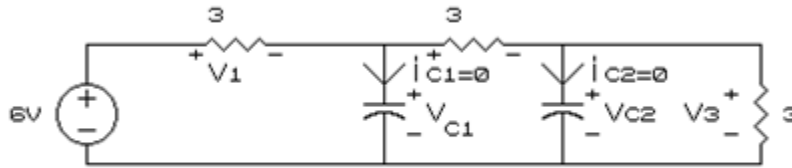


Figura4.4.21

Las corrientes en los capacitores se hacen cero, puesto que los interruptores han estado cerrados por "largo tiempo" luego podemos aplicar la relación del divisor de tensión para hallar la tensión en cada resistor obteniéndose

$$v_1 = v_2 = v_3 = 2 \text{ V}$$

luego $v_{c2}(0^-) = v_3 = v_{c2}(0^+) = 2 \text{ V}$

y $v_{c1}(0^-) = v_2 + v_3 = v_{c1}(0^+) = 4 \text{ V}$

Luego para hallar la constante A_1 tenemos :

Para $t = 0^+$

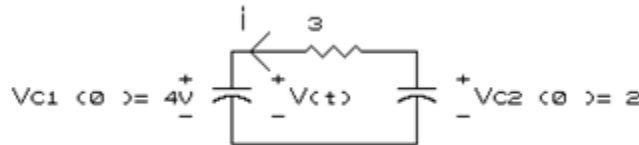


Figura4.4.22

$$i(0^+) = -2/3 \text{ A}$$

$$i(0) = A_1 e^{-0/12} = A_1 = -\frac{2}{3} \text{ A}$$

y por lo tanto

$$i(t) = -\frac{2}{3} * e^{-t/12}$$

Una vez conocida la corriente podemos calcular la tensión en cada uno de los capacitores

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$$

Reemplazando los respectivos valores tenemos

$$v_{c1}(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i dt = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{0^+} i dt + \frac{1}{C_1} \int_{0^+}^t -\frac{2}{3} * e^{-t/12} dt = v_{c1}(0^+) + \frac{1}{6} \int_{0^+}^t -\frac{2}{3} * e^{-t/12} dt$$

$$v_{c1}(t) = \frac{24}{9} + \frac{12}{9} e^{-t/12}$$

De aquí vemos que el capacitor de 6 F queda con una tensión final 24/9 V (para $t > 5\tau$).

A pesar de que el ejercicio no nos lo pide hallemos el valor de la tensión en el otro capacitor $C = 12$ F

$$v_{c2}(t) = \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i dt = v_{c2}(0^+) - \frac{1}{12} \int_{0^+}^t -\frac{2}{3} * e^{-t/12} dt = \frac{24}{9} - \frac{6}{9} e^{-t/12}$$

Al observar la tensión en ambos capacitores vemos que para $t \rightarrow \infty$ $v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty) = 24/9$ V lo cual hace que $v_R(\infty) = 0$ (tensión de régimen permanente en el resistor) y por lo tanto $i(\infty) = 0$.

La energía final almacenada en los capacitores será:

$$W_{C1}(\infty) = \frac{1}{2} C_1 v_{c1}^2(\infty) = \frac{64}{3} J$$

$$W_{C2}(\infty) = \frac{1}{2} C_2 v_{c2}^2(\infty) = \frac{128}{3} J$$

También es posible calcular la energía disipada por el resistor en el intervalo entre $0 \leq t \leq \infty$ así:
La energía almacenada en los capacitores en $t = 0$ es

$$W_{C1}(0) = \frac{1}{2} C_1 v_{c1}^2(0) = 48 J$$

$$W_{C2}(0) = \frac{1}{2} C_2 v_{c2}^2(0) = 24 J$$

Luego en $t = 0$ la energía total almacenada en los capacitores era $W(0) = 48 + 24 = 72$ J y en $t = \infty$:
 $W(\infty) = 64$ J

por lo tanto la energía disipada por el resistor es :

$$72 - 64 = 8 J.$$

Esto lo podemos también hallar así:

$$W_R(t) = \int_0^{\infty} R * i_R^2(t) dt = 3 \int_0^{\infty} \left(-\frac{2}{3} * e^{-t/12}\right)^2 dt = 8 J$$

En conclusión, podemos decir que cuando existan capacitores en serie debemos hallar primero la corriente y luego la tensión en los capacitores, puesto que el método general propuesto nos dice, que aparentemente, la tensión de régimen permanente $v_p(t) = 0$ (en los capacitores), lo cual hemos

demostrado que no es cierto, en este caso.

Ejercicio 4.4.4: En el circuito de la fig. 4.4.23, S1 ha estado cerrado y S2 abierto por "largo tiempo". En $t=0$ S1 se abre y S2 se cierra. Hallar $v_c(t)$ para $t>0$.

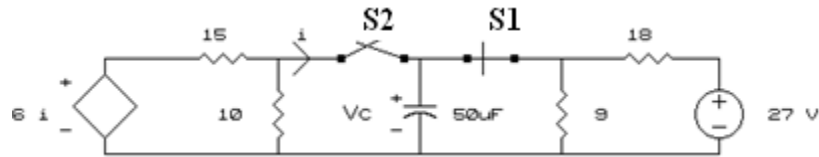


Figura4.4.23

Este es un circuito de primer orden, puesto que hay un solo capacitor, luego

$$v_c(t) = Ae^{-t/\tau} + B$$

Para hallar τ dibujemos el circuito que se obtiene para $t > 0$

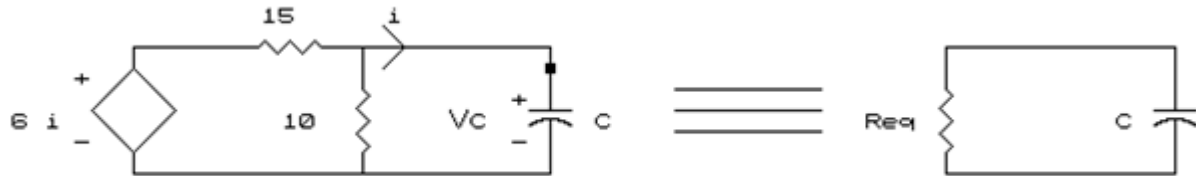


Figura4.4.24

La R_{eq} es la resistencia vista por el capacitor, luego la podemos considerar, como la resistencia de Thevenin, vista entre los extremos del capacitor tal como se muestra en la fig. 4.4.25.

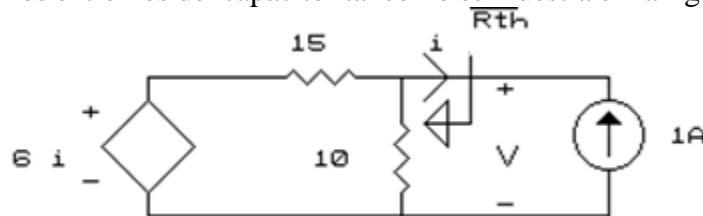


Figura4.4.25

$$R_{th} = \frac{v}{I_g} \text{ donde } I_g = 1 \text{ A}$$

Para el cálculo de $R_{th} = R_{eq}$, excitamos la red pasiva con una fuente de corriente de valor I_g y calculamos el valor de v , aplicando la LCK.

Para hacer esto tenemos:

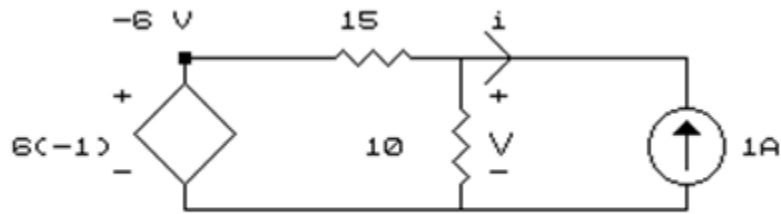


Figura 4.4.26

$$i = -I_g$$

$$v \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10} \right) - \frac{1}{15} (-6I_g) - I_g = 0$$

$$v = \frac{18}{5} I_g \text{ luego } R_{th} = \frac{18}{5} \Omega \text{ y } \tau = R_{th} C = \frac{18}{5} * 50 * 10^{-6} = 180 \mu s$$

El siguiente paso consiste en calcular $v_{cp}(t)$, el cual, de acuerdo a la fig. 4.4.24, es nulo, puesto que la red no tiene ninguna fuente independiente, y además no se presentan capacitores en serie como en el ejercicio anterior. Luego $v_{cp}(t) = B = 0$

Para hallar el valor de A es necesario conocer la condición inicial $v_c(0^+)$, la cual podemos calcular así:

En $t = 0$ tenemos:

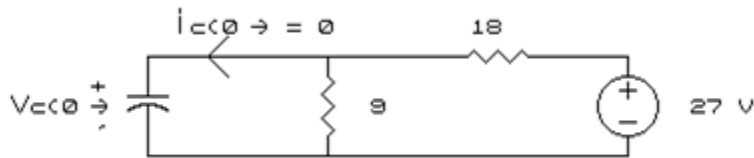


Figura 4.4.27

$$v_c(0^-) = 27 * \frac{9}{18 + 9} = 9 V$$

$$v_c(t) = A e^{-t/\tau} + B = A e^{-t/\tau} + 0$$

$$\text{En } t = 0 \quad v_c(0) = A = 9$$

$$v_c(t) = 9 e^{(-t/(180 * 10^{-6}))} \text{ t dado en s}$$

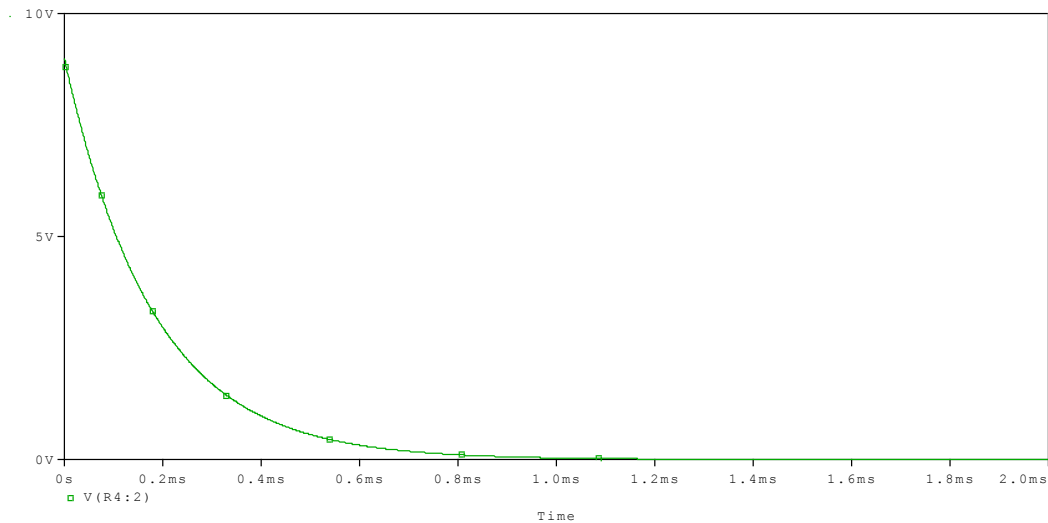


Figura4.4.28

Observe que la tensión $v_c(t)$ no cambia bruscamente en $t = 0$

Ejercicio 4.4.5:

El circuito RC de la figura 4.4.29, es excitado por una tensión $v_s(t)$, cuya forma de onda es mostrada. Halle el valor de V_s de tal manera que $v_c(t) = 0$ en $t = 2RC$. $t_1 = RC$ y $t_2 = 2RC$

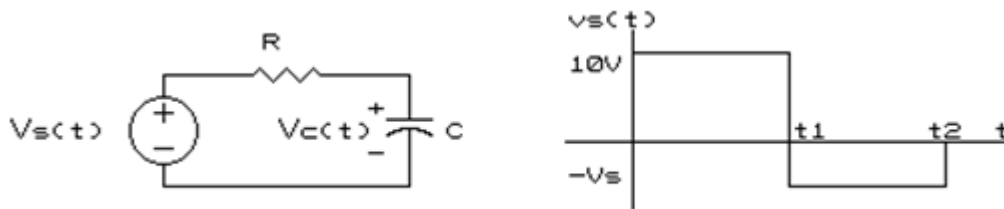


Figura4.4.29

De acuerdo a la forma de onda de $v_s(t)$, podemos decir que en el intervalo $0 \leq t \leq RC$, el circuito está excitado por una tensión constante de 10 V tal como se muestra en la fig. 4.4.30.

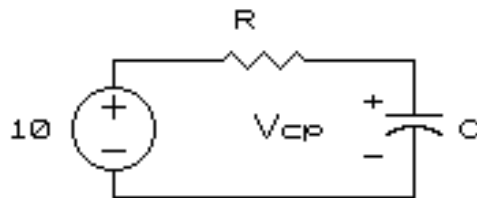


Figura4.4.30 $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$ puesto que no había excitación para $t < 0$. Luego:

$$v_c(t) = Ae^{-t/\tau} + B = -10e^{-t/RC} + 10 \text{ para } 0 \leq t \leq RC$$

$$\text{En } t = RC \quad v_c(RC) = 10(1 - e^{-1}) = 6,32 \text{ V}$$

En este instante ocurre una variación en el circuito, puesto que la excitación cambia a un valor $-V_s$, tal como se muestra en la fig. 4.4.29.

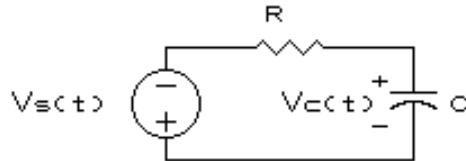


Figura 4.4.31

Como la tensión en el capacitor no puede cambiar instantáneamente se tiene que

$$v_c(RC^-) = v_c(RC^+) = 6,32 \text{ V}$$

y además $v_c(t') = A_1 e^{-t'/\tau} + B = A_1 e^{-t'/RC} - V_s$ donde $t' = t - RC$

$t' = 0$ equivale a $t = RC$, instante en el cual se realizó una nueva conmutación en el circuito. En $t' = 0^+$ ó $t = RC^+$ se tiene:

$$v_c(0) = A_1 - V_s = 6,32 \quad \text{luego } A_1 = 6,32 + V_s$$

$$v_c(t') = A_1 e^{-t'/RC} - V_s = (6,32 + V_s) e^{-t'/RC} - V_s$$

Para hallar V_s sabemos que en $t' = RC$ ó $t = 2RC$, $v_c(RC) = 0$

$$\text{Luego} \quad 0 = (6,32 + V_s) e^{-1} - V_s \quad \text{entonces } V_s = 3,68 \text{ V}$$

Ejercicio 4.4.6: En el circuito de la fig. 4.4.32 hallar $v_1(t)$. En $t < 0$ s, S1 permanece abierto y S2 cerrado. En $t = 0$ s, S1 se cierra y S2 permanece cerrado. En $t = 20 \mu\text{s}$, S1 permanece cerrado y S2 se abre.

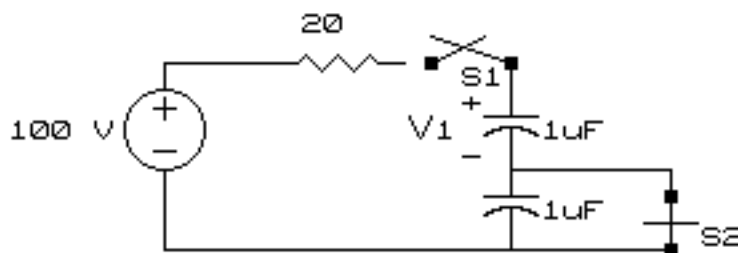


Figura 4.4.32

Al observar la fig. 4.4.32, vemos que el circuito equivalente en el intervalo $0 \leq t \leq 20 \mu\text{s}$ es:

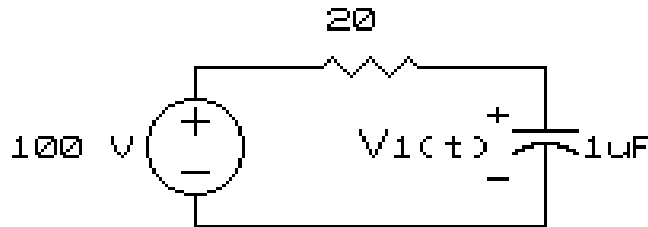


Figura4.4.33

$$\tau = RC = 20 \times 1 \times 10^{-6} = 20 \mu\text{s}$$

$$v_1(t) = 100(1 - e^{(-t/(20 \times 10^{-6}))}) \text{ Para } 0 \leq t \leq 20 \mu\text{s}.$$

En $t = 20 \mu\text{s}$ se abre el interruptor S2, quedando el circuito así:

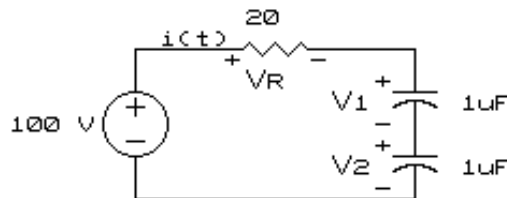


Figura4.4.34

$$v_1(20 \mu\text{s}) = 63,2 \text{ V y } v_2(20 \mu\text{s}) = 0 \text{ V}$$

Recuerde que al hacer la nueva conmutación en $t = 20 \mu\text{s}$, las tensiones en los capacitores no pueden cambiar bruscamente luego

$$v_1(20 \mu\text{s}^-) = v_1(20 \mu\text{s}^+) = 63,2 \text{ V}$$

$$\text{y } v_2(20 \mu\text{s}^-) = v_2(20 \mu\text{s}^+) = 0 \text{ V}$$

Puesto que existen dos capacitores en serie la forma recomendada para hallar $v_1(t)$ en $t \geq 20 \mu\text{s}$. es a través de la corriente $i(t)$, la cual tendrá la expresión siguiente:

$$i(t') = A_1 e^{-t'/\tau} \quad \text{donde } t' = t - 20 \mu\text{s}$$

Para hallar A_1 sabemos que la tensión $v_R(20 \mu\text{s})$ es:

$$-100 + v_R(20 \mu\text{s}) + v_1 + v_2 = 0$$

$$\text{en } t = 20 \mu\text{s} \quad v_R(20 \mu\text{s}) = 100 - 63,2 - 0 = 36,8 \text{ V}$$

luego $i_R(20 \mu s) = \frac{36,8}{20} = 1,84A$

$$i(t) = 1,84e^{-\frac{t}{10 \cdot 10^{-6}}}$$

y para hallar $v_1(t')$ para $t' > 0$ o sea para $t > 20 \mu s$, tenemos

$$v_1(t') = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{t'} i(\tau) d\tau = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^0 i(\tau) d\tau + \frac{1}{C_1} \int_0^{t'} i(\tau) d\tau$$

$$v_1(t' = 0) + 10^6 \int_0^{t'} 1,84e^{-\frac{t}{10 \cdot 10^{-6}}} dt = 81,6 - 18,4e^{-\frac{t}{10 \cdot 10^{-6}}}$$

4.5 Circuitos RL de Primer Orden

Consideremos el circuito mostrado en la fig. 4.5.1, y hallemos la corriente $i(t)$.

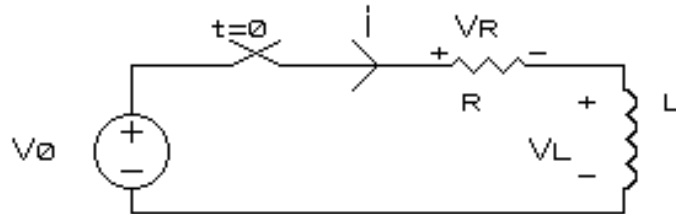


Figura 4.5.1

Para hallar $i(t)$, apliquemos la LTK:

$$-v_0 + v_R + v_L = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v_0 \quad (4.5.1)$$

Aquí se obtiene nuevamente una ecuación diferencial, lineal, ordinaria con coeficientes constantes donde el miembro de la derecha es una constante, luego podemos asumir que la solución de esta ecuación es:

$$i(t) = Ae^{-t/\tau} + B$$

que al remplazarla en la ecuación (4.5.1) se obtiene:

$$R \left(Ae^{-\frac{t}{\tau}} + B \right) + L \left(-\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = v_0$$

reordenando los términos tenemos:

$$\left(R - \frac{L}{\tau} \right) Ae^{-\frac{t}{\tau}} + BR = v_0$$

Como esta debe ser una identidad se tiene:

$$R - \frac{L}{\tau} = 0 \quad \text{y} \quad BR = v_0$$

$$\text{luego } \tau = \frac{L}{R} \text{ y } B = \frac{v_0}{R}$$

El valor de la constante A se hallaría a partir de las condiciones iniciales, para lo cual sabemos que en un inductor la corriente no puede cambiar en forma abrupta, y como para $t < 0$ el interruptor estaba abierto, la energía almacenada en el inductor era nula y por lo tanto $i_L(0^-) = 0 = i_L(0^+)$

$$\text{luego } i(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{v_0}{R}$$

$$\text{en } t = 0 \quad i(0) = A + \frac{v_0}{R} = 0 \quad \text{luego } A = -\frac{v_0}{R}$$

$$\text{quedando } i(t) = \frac{v_0}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

cuyo gráfico se muestra en la fig. 4.5.2.

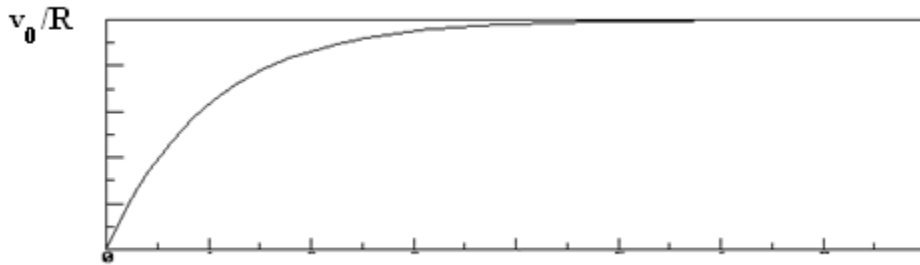


Figura 4.5.2

La pendiente inicial es:

$$\text{En } t = 0 \quad \frac{di}{dt} = \frac{v_0}{L}$$

Ud. puede hacer un paralelo con la interpretación dada para la constante de tiempo, en el caso RC.

Debido a que las ecuaciones diferenciales que caracterizan a los sistemas RC y RL son del mismo tipo, vemos que en los circuitos RL también podemos asumir que las respuestas tienen una parte transitoria $y_t(t)$ y una respuesta de régimen permanente $y_p(t)$, lo cual quiere decir, que en un circuito RL de primer orden la respuesta (corriente o tensión en cualquier elemento de la red) será de la forma:

$$y(t) = y_t(t) + y_p(t)$$

donde
y

$$y_t(t) = Ae^{-t/\tau}$$

$$y_p(t) = B \text{ constante}$$

Recuerde que el circuito será de primer orden, si una vez eliminada la fuente independiente, es posible reducirlo a una sola resistencia R_{eq} y un solo inductor L_{eq} .

En la siguiente parte realizaremos un grupo de ejercicios con circuitos RL de primer orden.

Ejercicio 4.5.1. En el circuito de la fig. 4.5.3, se pide calcular $i_R(t)$ para $t > 0$.

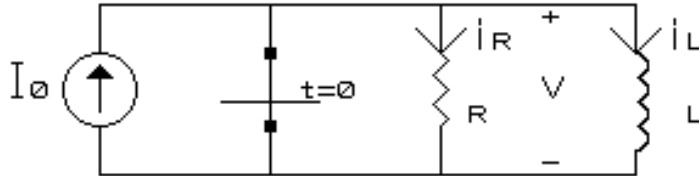


Figura 4.5.3

La corriente tendrá la expresión siguiente:

$$i_R(t) = i_{Rt}(t) + i_{Rp}(t)$$

donde

$$i_{Rt}(t) = Ae^{-Rt/L}$$

La respuesta de régimen permanente la podemos encontrar considerando que ha transcurrido un tiempo $t > 5\tau$, luego las tensiones y corrientes en el circuito podemos tomarlas como constantes con el tiempo, debido a que la excitación es una corriente continua $i_s(t) = I_0$. Esto implica que la tensión en el inductor se anula, al alcanzar el régimen permanente puesto que $i(t) = i_p(t) = \text{cte}$ para $t > 5\tau$

Esto quiere decir que, cuando la excitación en un circuito RL es corriente continua y ha transcurrido un tiempo lo suficientemente largo como para que el circuito haya alcanzado el régimen permanente, podemos decir que el inductor se comporta como un cortocircuito, luego en régimen permanente tenemos que:

$$v_p(t) = 0$$

y por lo tanto $i_{Rp}(t) = 0$ e $i_{Lp}(t) = I_0$

Para hallar la constante A tenemos que conocer las condiciones iniciales, las cuales se determinan sabiendo que la corriente en un inductor no puede cambiar instantáneamente, lo cual quiere decir que la corriente en un inductor es la misma un instante antes y un instante después de una conmutación, en otras palabras, si la conmutación se realiza en $t = 0$, tenemos: $(i_L(0^-) = i_L(0^+))$.

En el circuito bajo análisis tenemos que:

$$i_L(0^-) = 0 = i_L(0^+)$$

puesto que para $t < 0$ toda la corriente de excitación circulaba a través del interruptor.

Por lo tanto $i_R(0^+) = I_0$

luego $i_R(t) = I_0 = A$

Es de hacer notar que la corriente i_R saltó de 0 a I_0 tal como lo muestra la fig. 4.5.4.

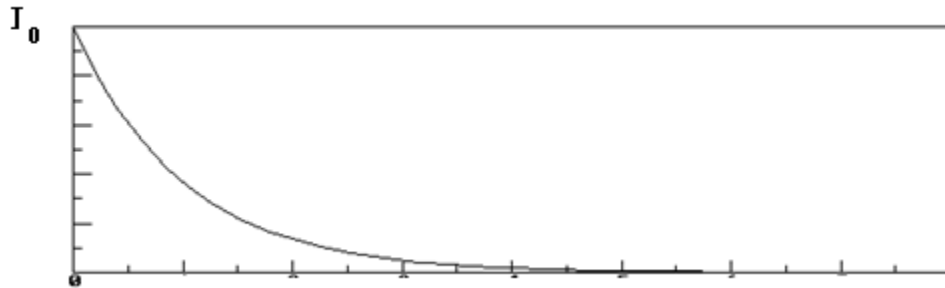


Fig 4.5.4

Lo cual es posible, pues tal como hemos analizado, la única variable en un circuito RL que no puede cambiar instantáneamente es i_L (corriente en los inductores).

Ejercicio 4.5.2:

El circuito de la fig. 4.5.5, ha alcanzado un régimen permanente con el interruptor abierto. En $t = 0$ se cierra S. Hallar $v_1(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$.

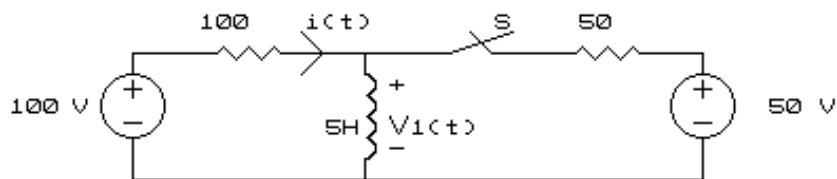


Figura4.5.5

Hallemos primero $v_1(t)$

$$v_1(t) = Ae^{-t/\tau} + B$$

Para hallar τ tenemos que para $t > 0$:

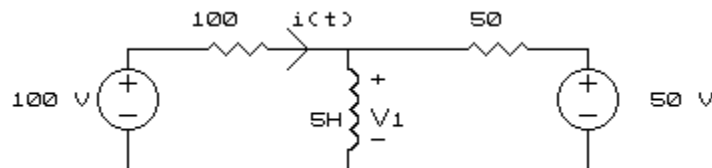


Figura4.5.6

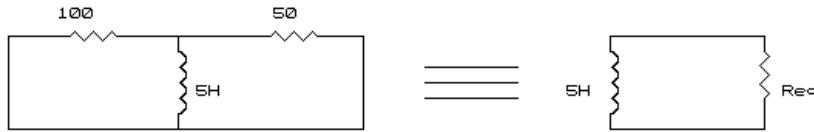


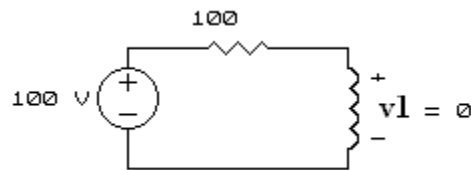
Figura4.5.7

$$R_{eq} = \frac{100 \cdot 50}{100 + 50} = \frac{100}{3} \Omega \quad \text{y} \quad \tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{20} s$$

Después de un largo tiempo de haber hecho la conmutación, sabemos que:

$$v_1(0) = 0 = B$$

Para determinar el valor de A, hallemos la corriente en el inductor un instante antes de la conmutación. $v_L = 0$, puesto que el circuito estuvo un largo tiempo en esta posición

Figura4.5.8 Para $t < 0$

$$i_L(0^-) = \frac{100}{100} = 1 A$$

Nos interesa hallar $v_1(0^+)$, para lo cual tenemos en $t = 0^+$

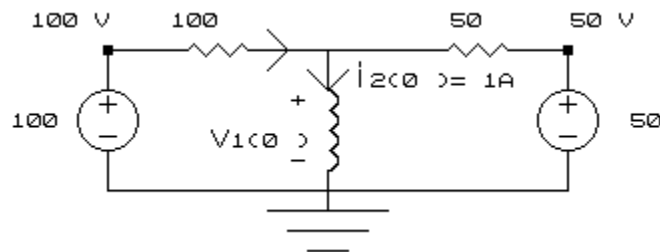


Figura4.5.9

Usando la LCK tenemos:

$$v_1(0^+) \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{50} \right) - 100 * \frac{1}{100} - 50 * \frac{1}{50} + 1 = 0$$

$$v_1(0^+) = \frac{100}{3} V$$

La tensión en el inductor cambió instantáneamente de 0 a $100/3 V$ en $t = 0$.

Ahora si podemos hallar A

$$v_1(0) = \frac{100}{3} = A + 0 \quad A = \frac{100}{3}$$

$$v_1(t) = \frac{100}{3} e^{-\frac{20t}{3}}$$

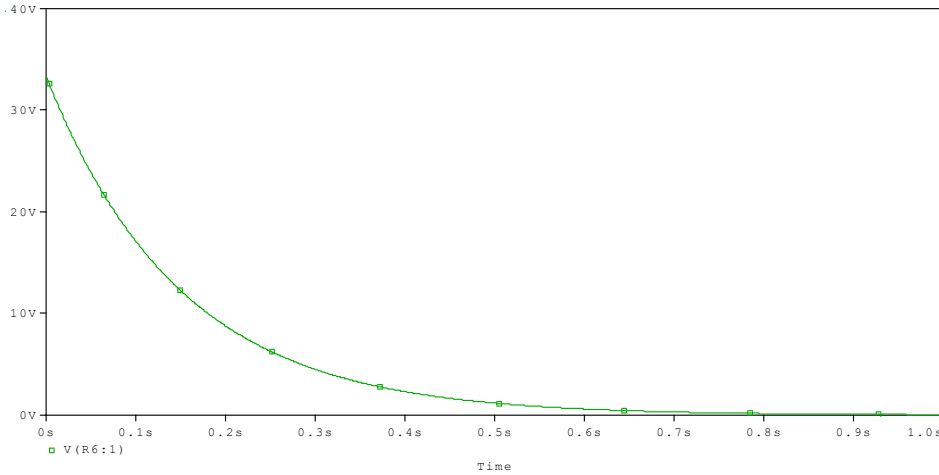


Figura 4.5.10

Ahora encontremos $i(t)$:

$$i(t) = A_1 e^{-\frac{20t}{3}} + B_1$$

B_1 se puede hallar a partir del circuito de la fig. 4.5.6, considerando que $v_1(t) = 0$ (régimen permanente), luego al aplicar la LTK.

$$0 + 100 * B_1 - 100 = 0$$

$$\therefore i_p(t) = B_1 = 1 \text{ A}$$

Para hallar el valor de A_1 debemos conocer $i(0^+)$ el cual se puede calcular a partir del circuito de la fig. 4.5.9, donde sabemos que $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 1 \text{ A}$. Allí determinamos que

$$v_1(0^+) = \frac{100}{3} \text{ V}$$

Luego

$$i(0^+) = \frac{100 - \frac{100}{3}}{100} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

$$i(0) = \frac{2}{3} = A_1 + 1 \quad A_1 = -\frac{1}{3}$$

$$i(t) = -\frac{1}{3} e^{-\frac{20t}{3}} + 1$$

Ejercicio 4.5.3: En el circuito de la fig. 4.5.11, hallar $i_L(t)$ sabiendo que $i_L(0) = 5A$

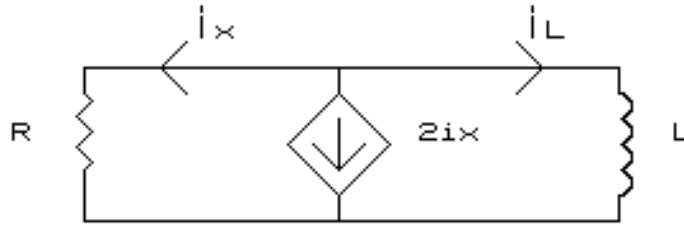


Figura4.5.11

El circuito de la fig. 4.5.11, no tiene ninguna fuente independiente, pero existe una respuesta debida a que en $t = 0$, hay una cierta energía almacenada en el inductor. Al disiparse dicha energía en el circuito las corrientes y tensiones en el circuito se anulan, luego podemos decir que las respuestas de régimen permanente son nulas, y solo existen respuestas transitorias. Para hallar el valor de τ debemos determinarla R_{Th} vista por el inductor:

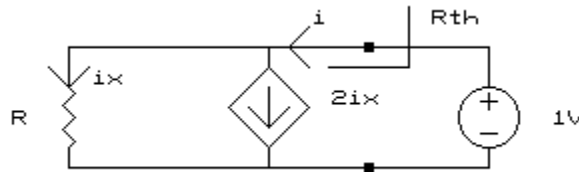


Figura4.5.12 $i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_x = \frac{V_g}{R} \qquad i = 3i_x = 3 * \frac{V_g}{R} \qquad R_{th} = \frac{V_g}{i} = \frac{V_g}{3 * \frac{V_g}{R}} = \frac{R}{3}$$

Luego $R_{eq} = R_{th} = \frac{R}{3}$ y $\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 3 \frac{L}{R}$

Para hallar el valor de A, sabemos que $i_L(0) = 5$

Luego $i_L(0) = A = 5$

$$i(t) = 5e^{-\frac{Rt}{3L}}$$

Ejercicio 4.5.4: En el circuito de la fig. 4.5.13, hallar las corrientes en los inductores para $t > 0$.

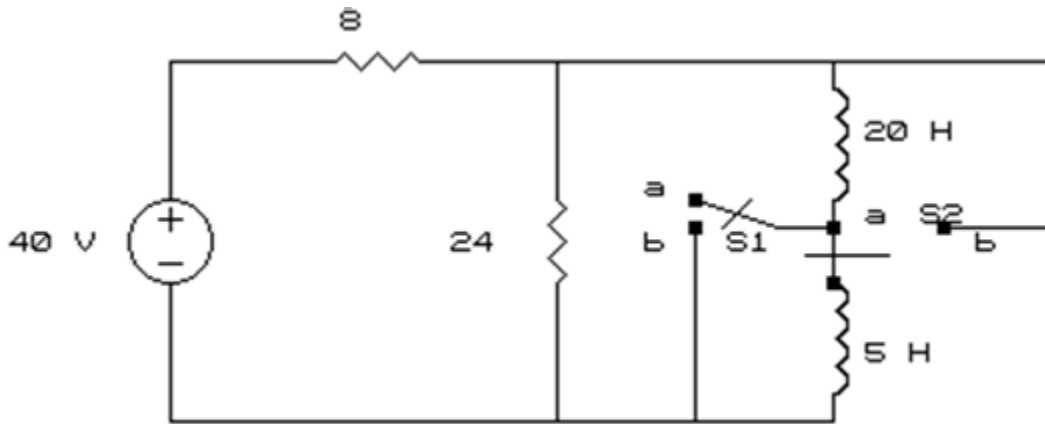


Figura4.5.13

S1 y S2 han estado "largo tiempo" en la posición **a**. En $t = 0$ pasan a la posición **b**.

Para $t > 0$ el circuito queda así:

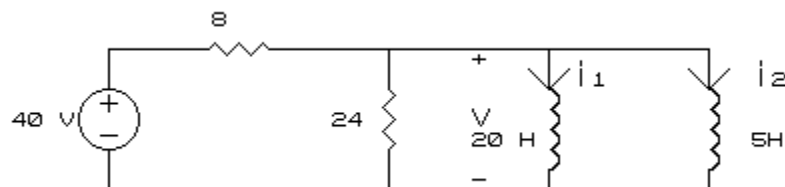


Figura4.5.14

Si observamos cuidadosamente el circuito, vemos que no es fácil la determinación de las corrientes de régimen permanente en los inductores, puesto que después de un largo tiempo de haber conmutado los interruptores, los inductores se comportan como corto circuitos y no podemos calcular en forma sencilla la forma como se reparte la corriente en los dos inductores. Por esta razón, cuando tenemos inductores en paralelo y queremos determinar la corriente que circula por ellos se recomienda, hallar primero el valor de la tensión y luego usar la relación tensión-corriente:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau$$

Para hallar $v(t)$ procedamos así:

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + B$$

Para determinar el valor de τ tenemos:

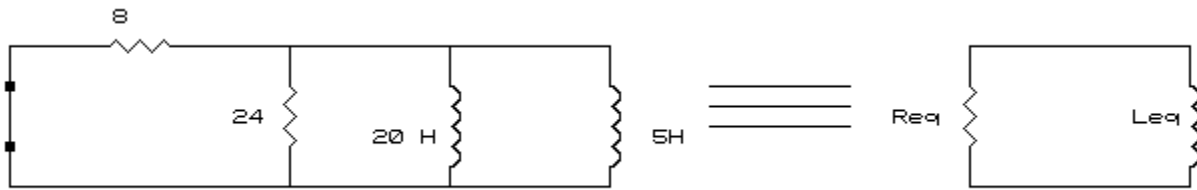


Figura 4.5.15

$$R_{eq} = \frac{8 * 24}{32} = 6 \Omega \quad L_{eq} = \frac{20 * 5}{25} = 4 H$$

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} s$$

Debido a que los inductores se comportan como un corto circuito, en régimen permanente, cuando la excitación es constante, tenemos que:

$$v_p(t) = B = 0$$

Para encontrar el valor de la constante A, debemos calcular las corrientes en los inductores. Para $t = 0^-$, instante en el cual el circuito está en régimen permanente y lo podemos representar así:

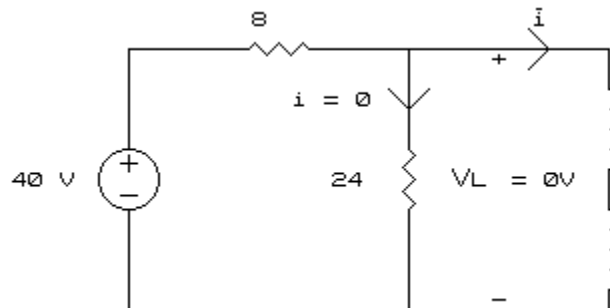


Figura 4.5.16

$$i_{L1}(0^-) = i_{L2}(0^-) = i(0^-) = \frac{40}{8} = 5 A$$

Como la corriente en los inductores no puede cambiar en forma instantánea, se tiene que:

$$i_{L1}(0^-) = i_{L1}(0^+) = 5 A \quad e \quad i_{L2}(0^-) = i_{L2}(0^+) = 5 A$$

luego en $t = 0^+$ tendremos:

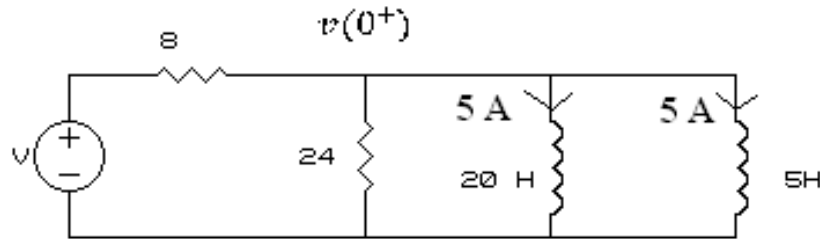


Figura 4.5.17

Al aplicar la LCK, tenemos:

$$v(0^+) \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) - 40 * \frac{1}{8} + 5 + 5 = 0 \quad \text{luego} \quad v(0^+) = -30 \text{ V}$$

$$v(0^+) = -30 \text{ V}$$

y por lo tanto

$$v(t) = -30e^{-\frac{3t}{2}}$$

Conociendo esta tensión podremos calcular las corrientes en los inductores así:

$$i_1(t) = \frac{1}{20} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau = \frac{1}{20} \int_{-\infty}^{0^+} v_L(\tau) d\tau + \frac{1}{20} \int_{0^+}^t v_L(\tau) d\tau$$

$$i_1(t) = i_1(0^+) + \frac{1}{20} \int_{0^+}^t -30e^{-\frac{3\tau}{2}} d\tau = 4 + 1 * e^{-\frac{3\tau}{2}}$$

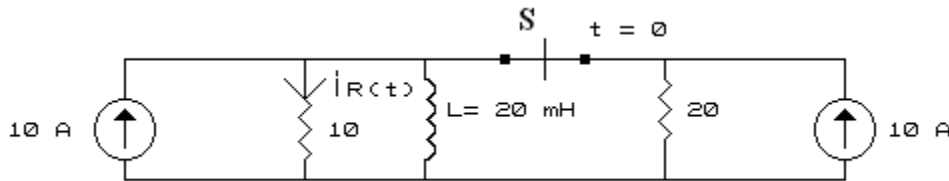
$$i_2(t) = \frac{1}{5} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau = \frac{1}{5} \int_{-\infty}^{0^+} v_L(\tau) d\tau + \frac{1}{5} \int_{0^+}^t v_L(\tau) d\tau$$

$$i_2(t) = i_2(0^+) + \frac{1}{5} \int_{0^+}^t -30e^{-\frac{3\tau}{2}} d\tau = 1 + 4 * e^{-\frac{3\tau}{2}}$$

Ejercicios Propuestos.

En todos los ejercicios propuestos haga las respectivas gráficas.

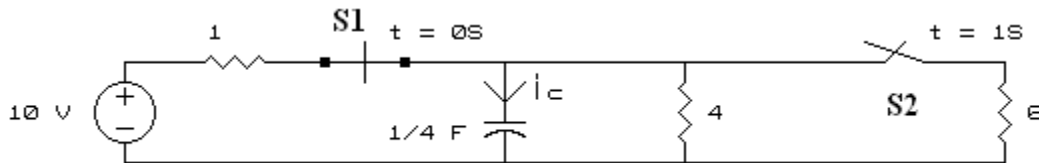
1. Hallar $i_R(t)$. S se abre en $t=0$ **Resp ($i_R(t) = -10e^{\frac{-t}{2 \times 10^{-3}}}$)**



FiguraP.4.1

2. Para $t \leq 0$ s, S1 está cerrado y S2 abierto. En $t=0$ s S1 se abre y en $t=1$ s S2 se cierra. .
Hallar $i_c(t)$ para $t > 0$. **Resp ($i_c(t) = -2e^{-t}$ para $0 \leq t \leq 1$ s**

$$i_c(t) = -0,736e^{\frac{-5(t-1)}{3}} \text{ para } t \geq 1 \text{ s}$$

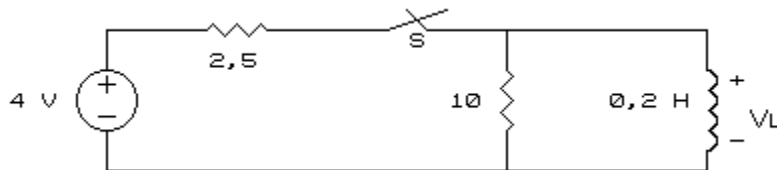


FiguraP.4.2

3. El interruptor S se cierra en $t = 0$ y se abre nuevamente en $t = 0,1$ S. Hallar $v_L(t)$ $t > 0$

$$\text{Resp } (v_L(t) = -3,2e^{-10t} \text{ para } 0 \leq t \leq 0,1 \text{ s}$$

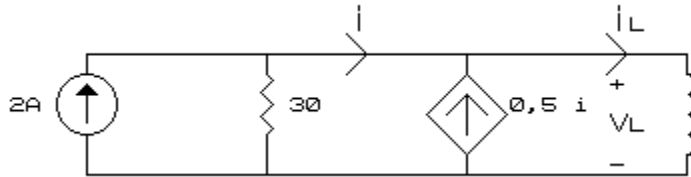
$$v_L(t) = -10,1146e^{-50(t-0,1)} \text{ para } t \geq 0,1 \text{ s}$$



FiguraP.4.3

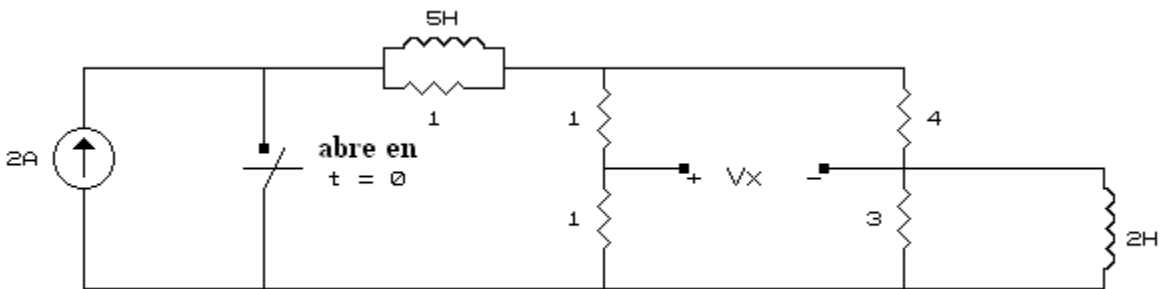
4. Hallar $v_L(t)$ e $i_L(t)$ si $i_L(0) = -2$ A.

Resp ($i_L(t) = -5e^{-1000t} + 3$ $v_L(t) = 100e^{-1000t}$)



FiguraP.4.4

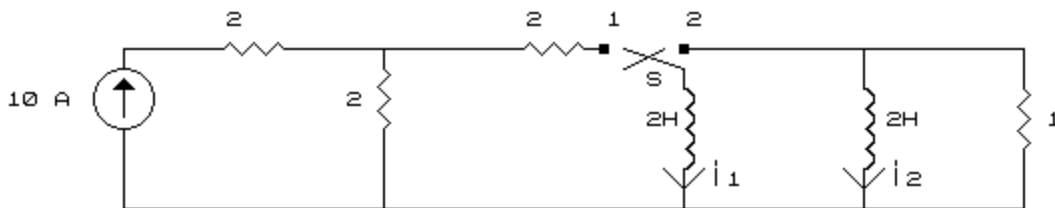
5. Hallar $v_x(t)$ $t > 0$. **Resp** ($v_x(t) = -\frac{10}{9}e^{-t} + \frac{4}{3}$)



FiguraP.4.5

6. El interruptor S ha estado en la posición 1 un largo tiempo. En $t = 0$ pasa a la posición 2. Halle $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $t > 0$ y la energía disipada por $R = 1 \Omega$ en el intervalo $0 \leq t < \infty$.

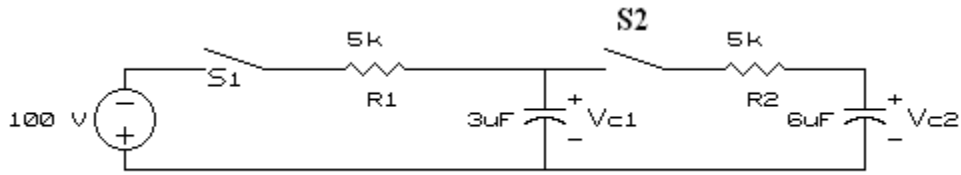
Resp ($i_1(t) = 2,5 + 2,5 e^{-t}$ $i_2(t) = 2,5 e^{-t} - 2,5$ $W_R = 12,5$ J)



FiguraP.4.6

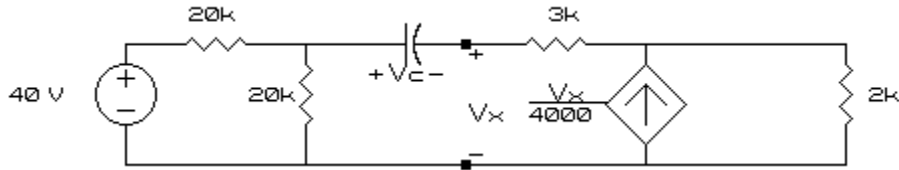
7. En $t = 0$ se cierra el interruptor S1 (S2 queda abierto). En $t = 75$ ms S1 se abre y S2 se cierra. Hallar $v_{c1}(t)$, $v_{c2}(t)$ y la energía disipada por R_2 en el intervalo $0 \leq t < \infty$.

Resp ($v_{c1}(t) = -\frac{200}{3}e^{-100t} - \frac{100}{3}$ $v_{c2}(t) = -\frac{100}{3}e^{-100t} - \frac{100}{3}$) =



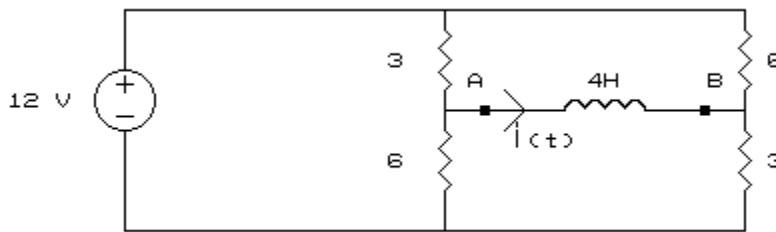
FiguraP.4.7

8. Hallar $v_c(t)$ para $t > 0$, si $v_c(0) = 0$. Resp ($v_c(t) = -20e^{-t} + 20$)



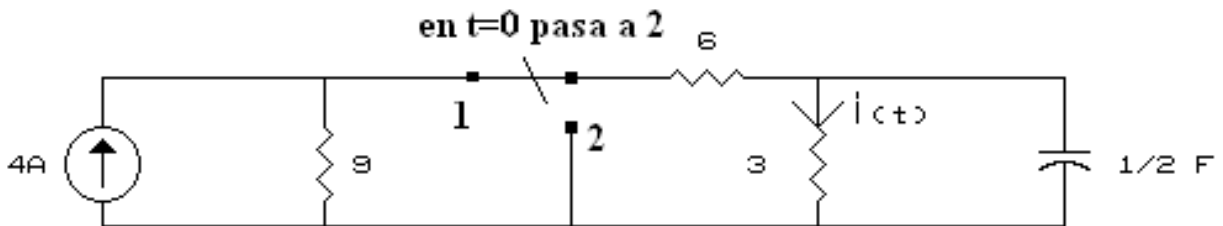
FiguraP.4.8

9. Hallar $i(t)$ para $t > 0$, si $i(0) = 0$. Resp ($i(t) = 1 - e^{-t}$)



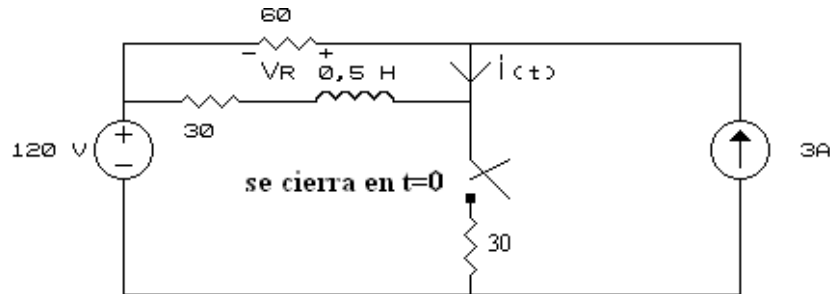
FiguraP.4.9

10. Hallar $i(t)$ para $t > 0$ y energía consumida por $R = 6 \Omega$ y $R = 3 \Omega$ en el intervalo $0 \leq t \leq \infty$.
 Resp ($i(t) = 2e^{-t}$ $W_{6\Omega} = 3 J$ $W_{3\Omega} = 6 J$)



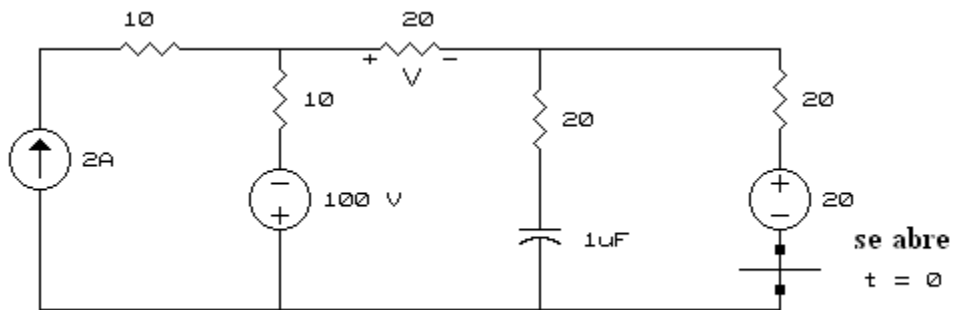
FiguraP.4.10

11. Hallar $v_R(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$. Resp ($i(t) = 3,2 + 0,2 e^{-100t}$) $v_R(t) = -12 - 48e^{-100t}$)



FiguraP.4.11

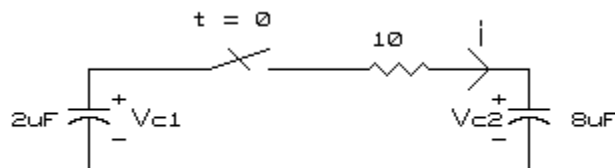
12. Hallar $v(t)$, $t > 0$ Resp ($v(t) = -24e^{-\frac{t}{50 \times 10^{-6}}}$)



FiguraP.4.12

13. Si $v_{c1}(0) = 50V$, $v_{c2}(0) = 100V$. Hallar $i(t)$ para $t > 0$, $v_{c1}(\infty)$ y $v_{c2}(\infty)$.

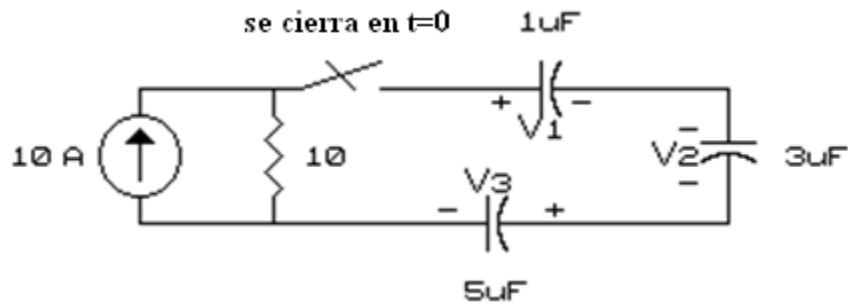
Resp ($i(t) = -5e^{-\frac{t}{16 \times 10^{-6}}}$ $v_{c1}(\infty) = v_{c2}(\infty) = 90V$)



FiguraP.4.13

14. Determinar v_1 , v_2 y v_3 para $t = \infty$ sabiendo que: $v_1(0) = 50V$, $v_2(0) = 20V$, $v_3(0) = 0V$.

Resp ($v_1(\infty) = 69,57 \text{ V}$ $v_2(\infty) = 26,52 \text{ V}$ $v_3(\infty) = 3,91 \text{ V}$)

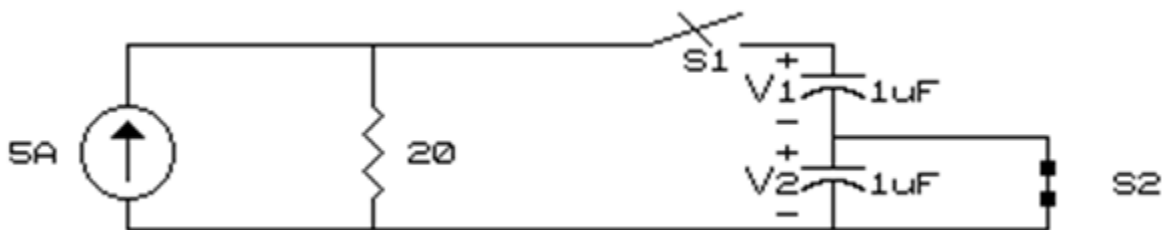


FiguraP.4.14

15. Si S_1 se cierra en $t = 0$ (S_2 permanece cerrado) y en $t = 20 \mu\text{s}$ se abre S_2 , hallar $v_1(t)$.

Resp ($v_1(t) = 100 - 100e^{\frac{-t}{20 \times 10^{-6}}}$ para $0 \leq t \leq 20 \mu\text{s}$

$v_1(t) = 81,5 - 18,5e^{\frac{t-20}{1 \times 10^{-6}}}$ para $t \geq 20 \mu\text{s}$)



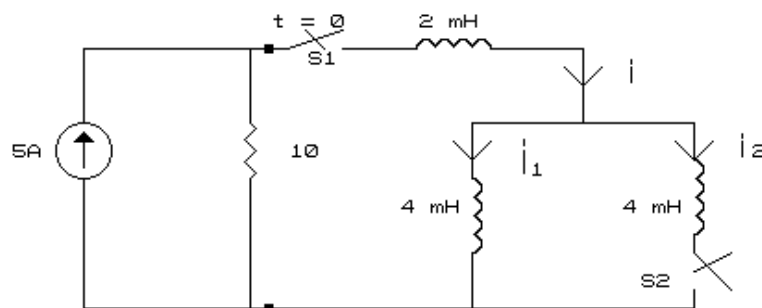
FiguraP.4.15

16. Si el interruptor S_2 se cierra en $t = 0,6 \text{ ms}$, hallar $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ para $t > 0$.

Resp ($i(t) = 5 - 5e^{\frac{-t}{0,6 \times 10^{-3}}}$

$i_1(t) = 4,08 - 0,92e^{\frac{t-0,6 \times 10^{-3}}{0,4 \times 10^{-3}}}$

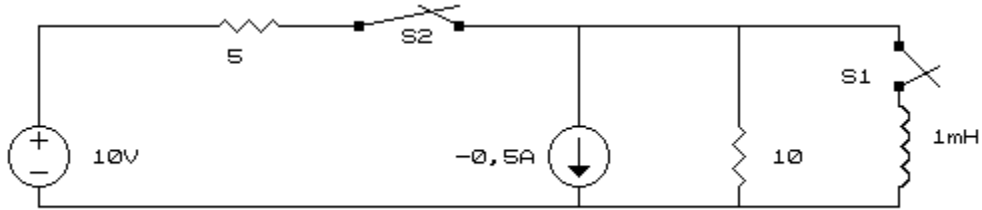
$i_2(t) = 0,92 - 0,92e^{\frac{t-0,6 \times 10^{-3}}{0,4 \times 10^{-3}}}$



FiguraP.4.16

17. En $t = 0$, se cierra S1 y después de $0,1 \text{ ms}$ se cierra S2. Hallar $i(t)$.

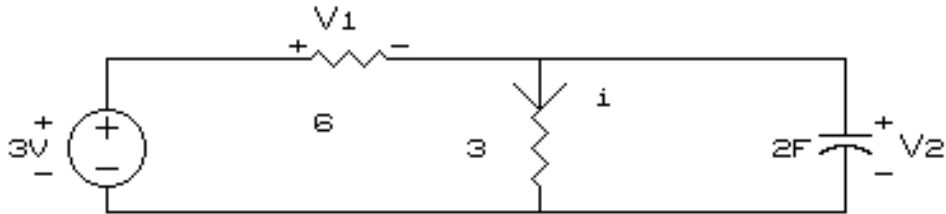
Resp $i(t) = 0,5 - 0,5e^{-\frac{t}{0,1 \cdot 10^{-3}}}$
 $i_1(t) = 2,5 - 2,184e^{-\frac{t - 0,1 \cdot 10^{-3}}{0,3 \cdot 10^{-3}}}$



FiguraP.4.17

18. Si $v_2(0^-) = 1 \text{ V}$, hallar: $v_1(t)$, $v_2(t)$ e $i(t)$.

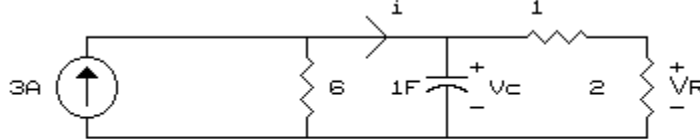
Resp ($v_1(t) = 2 \text{ V}$ $v_2(t) = 1 \text{ V}$ $i(t) = 1/3 \text{ A}$)



FiguraP.4.18

19. Si $v_c(0^-) = 12 \text{ V}$, halle: $i(t)$, $v_c(t)$ y $v_R(t)$.

Resp ($i(t) = 2 - e^{-\frac{t}{2}}$, $v_c(t) = 6 + 6e^{-\frac{t}{2}}$, $v_R(t) = 4 + 4e^{-\frac{t}{2}}$)



FiguraP.4.19

20. Hallar $v(t)$ e $i(t)$.

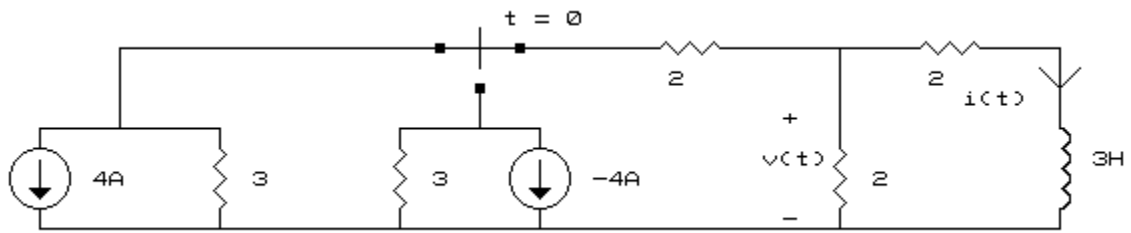


Figura P.4.20

21. Hallar $v_c(t)$ para $t > 0$.

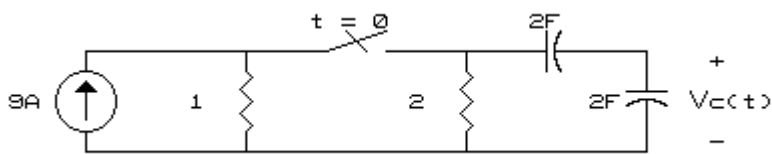


Figura P.4.21